集合と位相

彌永昌吉
彌永健一 著

岩波基礎数学選書

岩 波 書 店

集合と位相

監修

小平邦彦

編集

岩堀長慶
河田敬義
藤田　宏
小松彦三郎
田村一郎
服部晶夫
飯高　茂

集合と位相

彌永昌吉
彌永健一 著

岩波基礎数学選書

岩波書店

刊行にあたって
——数学的現象の把握を——

現代の数学は形式主義の影響を強くうけていて，数学の本にも，定義，公理，定理，証明を羅列した形式で書かれたものが多い．形式主義によれば，数学はそれ自身は意味をもたない記号を与えられたルールに従って並べて行くゲームに過ぎないということであるが，これは数学の最も本質的なものを見落しているのではなかろうか？　たとえば，公理的構成の規範となったHilbertの幾何学基礎論では，‘点’，‘直線’，等は意味のない無定義語，すなわち記号であって，‘猫’，‘雀’，等で置き換えても一向差支えないことになっているが，これは事実に反する．実際，Hadamardが指摘したように，幾何学基礎論には殆んど毎頁に図が載っている．図を描かず，頭の中で図を想像することもせずに，論理だけによってHilbertの幾何学基礎論を理解することは不可能であろう．このように意味を考えない形式主義の立場に立つ限り，幾何学基礎論さえも理解できないのである．

私の見る所では，数学は実在する数学的現象を記述しているのであって，数学を理解するということは，窮極において，その記述する数学的現象のイメージを言わば感覚的に把握し，形式主義では捕捉できない数学の意味を理解することである．

岩波講座「基礎数学」は現代の数学の基礎部門の基本的な内容を上述の意味で感覚的にわかり易く解説することを目標として編集された．このたびのシリーズはこの講座の中から学部程度の基礎教科に相当するものを選び「岩波基礎数学選書」として編集しなおしたものである．

この機会に章末問題に対して解答・ヒントを付し，学生の勉学に供するようにした．

1990年6月

小 平 邦 彦

目　次

第5章 順 序 関 係

第6章 順序数，基数

終 章 ZF 集合論，選出公理，連続体仮説

第II部 位 相

第1章 距 離 空 間

第2章 位 相 空 間

第 I 部　集　合　論

序章　集合論の生い立ち

§1　集合論の生い立ち

"'集合' とは一つの総体 M であり，それを形成するもの m (それは M の '要素' と呼ばれる) は，それぞれ確定し，互いに識別され得る，われわれの直観または思惟の対象である." これは 1895 年に発表された，Cantor による "超限集合論"[1] (第 1 部) の冒頭のことばである.

19 世紀も終りに近い時代，それはヨーロッパ全土にわたった戦争と革命の嵐も想い出の中に姿をひそめ，アジアでの帝国主義的侵略のピークをなした阿片戦争から既に半世紀近くの時が過ぎた日々であった.

5 年後にパリで催された第 2 回国際数学者会議で，Hilbert は '23 の問題' を提出し，20 世紀の数学が，滔々とほとばしり始める．そして，集合論は 20 世紀の数学にとって，もっとも基本的な諸概念を支えるものとなった.

Cantor にとって，集合論の展開にいたる研究の発端の一つとなった問題として，超越数に関するものがある.

複素数 α は，代数的方程式

$$(*)\qquad a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (n \text{ は自然数，} a_i \text{ は整数，} a_0\neq 0)$$

の根となるときに，'代数的数' と呼ばれ，α を根とする $(*)$ のような代数的方程式が存在しないときには '超越数' と呼ばれる．有理数，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ などはみな代数的数である．自然対数の底 e が超越数であることが Hermite によって証明されたのは 1873 年のことであり，続いて 1882 年に円周率 π が超越数であることが Lindemann によって証明され，ギリシア以来の '円積問題' (すなわち，与えられた円と等しい面積を持つ正方形を作図せよという問題) に終止符が打たれた．このように，自然数，有理数，$\sqrt{2}$ などの代数的数は 'どこにでもある' 数のようにも感じられ，e, π などの超越数は一見 '例外的' な数であるかのように見えるのだ

---

1) G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. **46** (1895), 481-512; **49** (1897), 207-246.

が，Cantor は 1874 年に発表された“実なる代数的数の一性質について”[1] という論文において，極めて簡明な方法によって，超越数が無限に存在すること，しかも，代数的数全体よりも，‘遙かに多く’存在することを示したのである．

Cantor は，上記の論文から 4 年後に発表された，集合論に関する一連の論文の中の最初のもの[2]において，二つの無限集合の‘大きさ’を比較するための方法として，‘1 対 1 対応’によるものを提起した．1 対 1 対応は，今日では常識に近いものになっているが，1878 年の当時としては新しいものであり，また，彼の提唱した実無限の概念に対しても，強硬な批判が投げかけられた．

Cantor の集合論の主要な内容は，1879 年より約 5 年間にわたって Mathematische Annalen に相次いで発表された．その最後のものは，“直線上の無限点集合について”[3] と題する論文であった．これらの論文の内容については，“現代数学の基礎概念 (上)”[4] にその要旨が述べられているが，その中から，数学における新しい概念に関する，Cantor によるつぎの有名なことばを引用しよう (これは，点集合についての上記の論文[3]の第 5 章第 8 節の一部である)：

“数学はその発展において全く自由であり，それを束縛するものは，ただその概念がそれ自身のうちに矛盾を含まず，かつそれらはそれよりも前に作られた，既に存在する，確認された概念と，定義によって順序づけられる定まった関係にあるという，当然の顧慮の外にない．特に新しい数を導入する場合には，その定義を与え，それによってそれらの数が十分決定され，時には古くよりある数との関係も明らかにされ，必要な場合はそれらの数の間の区別が判然となるようにされればよい．数がこれらの条件をすべて満たしさえすれば，数学においてそれは実在するものとみなされる．有限な正の整数と全く同様に，有理数も無理数も複素数も実在するものとする理由を，私はここに見るのである．

私の信ずる所によれば，多くの人のなす如く，これらの原則の中に，科学のための何等かの危険が存するやを憂うることは必要のないことである．第一に数の

1) G. Cantor: Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Crelles J. **77** (1874).

2) G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelles J. **84** (1878).

3) G. Cantor: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. **15** (1879), **17** (1880), **20** (1882), **21** (1883), **23** (1884).

4) 彌永昌吉：現代数学の基礎概念 (上)，弘文堂 (1944).

創造は，上述の条件のもとにのみ，自由に行なわれるのであるが，この条件が恣意を許す余地は甚だ小さいのである．また，すべての数学的概念は，それ自身の中に，自らを正す力を持つものである．実り少なく，目的に適わぬ概念であれば，間もなくその概念は実際何の役にも立たぬことによってそのことが明らかにされ，失敗によって顧みられぬに至るであろう．これに反し，数学的研究の熱情の赴くところを無用に狭くすることは，上述の原則より遙かに大きな危険を孕むものと私には思われる．それはこの学問の本質よりして何等の正当づけをも受けないからなおさらである．何故なら，**数学の本質**は正にその**自由**にあるからである．”

Cantor は，このような情熱的楽観主義に支えられて，単に数や図形のみならず，森羅万象を数学の対象としてとらえようという壮大な計画を始めたのである．しかし，彼自らが注意しているように，数学的に扱われる‘集合’の要素は，それぞれが‘確定’され，互いに‘見分けられる’ようなものでなければならない．たとえば，‘私が好むものの全体’というような‘集合’は，‘数学的集合’の範疇には，含まれまい．私にとって，好むか，好まないかを決めかねるものがあり得るし，‘好ましさの程度’を測る普遍的な方法も，ありそうには思えない．こういう意味で，‘私が好むもの’というような対象は，‘確定的’ではないのである．また，‘われわれの直観’，‘思惟’等々，また，‘われわれ’という‘もの’自体果して‘確定的’であろうか．しかし，泥沼の水と泥とが，必ずしも判然とは識別されなくとも，そこに咲く蓮の花は，いかにも判然と‘確定’され，‘互いに識別’されることにも似て，Cantor の意味での‘集合’の例としては，数の集合，図形の集合にとどまらず，‘限り無く多く’のものがある．ところが，集合論にとっての，致命的であるとさえ思われた危機は，集合論の内部からもたらされた．

集合について考えるとき，できるだけ普遍的な集合を想定することは自然なことであろう．そのようなものとして，集合全体から成る‘集合’S を考えることができるように思われる．1901-02 年頃，Zermelo と Russell が独立に考えたことは，正にこのような‘集合’に関連していた．S はそれ自身集合であるから，それ自身 S の要素である．しかし，たとえば，自然数全体から成る集合 $\boldsymbol{N}$ は，それ自身は自然数ではないので，$\boldsymbol{N}$ の要素ではない．こうして，S の要素，すなわち集合の中には，それ自身をその要素としては含まないようなものが確かに存在する．後者のような集合の全体は，また一つの集合 A を作る．ここで，A という

集合は，A の要素となるだろうか．もしも，A がそれ自身を要素として持たないならば，A の定義によって，A は A の要素である！　これは明らかに矛盾だから，A は A を要素として持たなければならない．ところが，また A の定義によって，このとき，A はそれ自身を要素として持ち得ない！　こうして，極めて簡明で，疑念をはさむ余地もないように思われる論理によって導かれたこの奇妙な矛盾は，'Russell の背理' と呼ばれ，集合論，否，数学全体の土台をゆさぶるものとして受け取られた．20 世紀の数学は，その出発の時点からすでに深刻な反省を余儀なくされたのである．

彫刻家にとっての原素材が木や石であり，彼の作品は槌やのみによって素材の中から掘り出されるとすれば，数学者にとっての原素材は 'ものとものの関係' であろう．数学者が扱う '空間' は，3 次元や n 次元の Euclid 空間，球面等々にとどまらず，'遠近' の概念の全く欠けたものにまで及ぶ．極めて具体性に富んだ数や図形の性質，あるいは自然や社会の状況の中で生起する事柄は，数学の理論を産み出す土壌ともいえよう．こうした具体的な事物の関連の数々の中に，本質的に流れる諸関係を浮き彫りにすること，この中から数学的創造が形をなして来る．そして，数学的に表現された '本質的関係' は，いまや，それの母胎となった具体的事物から '自由' である．目に見える '点' や '直線' の持つ諸性質から演繹される幾何学の定理は，そうした '点'，'直線' の個別的様相の底にある，それらの相互関係の仕方に，その根拠を持ち，それゆえに普遍的である．したがって，ここで基本的なことは，それらの個別性の底にある諸関係そのものであり，そうした諸関係を満たすものがもしも '点'，'直線' 以外にもあれば，たとえそれらが '星'，'雲' などと呼ばれようと，'点'，'直線' に関して成り立ったと同じ定理がそれらに関してもまた成り立つのである．これらの '基本的諸関係' は，'公理' として定式化され，そこに現われる '点'，'直線' などに当たる基本的諸概念は，'無定義概念' と呼ばれる．これらの公理に基づく理論において，'無定義概念' の '意味' は，ただそれらが与えられた諸命題を満たすものであるということ以上のものでも，それ以下のものでもない．こうして，一つの理論が，公理，無定義概念，それに，いくつかの確定した論理に基づいて構成される．このような，'公理主義' 的方法は，19 世紀最後の数年に Hilbert によってなされた幾何学の基礎に関する仕事の中で，明確な形を成して来ていたのだが，Russell の背理によって，その基礎を揺

り動かされた集合論を再構成するためにも，その方法が用いられた．すなわち，Zermelo は 1908 年に発表された 20 ページ程の論文[1]の中で，集合論の基礎となるべきいくつかの公理を提唱し，この公理系は 1922 年に Fraenkel[2] によって改良された．集合論の公理に関しては，その後も Bernays, von Neumann, Gödel, MacLane らによる業績があり，今日も研究が続けられている．

ところで，以上に述べたことからも見られるように，集合論に限らず，一つの理論の基礎となる公理系の選び方には，ただ一つ，絶対なものがあるとはいえない．他方，実際には，'意味のある' 理論を構成するためには，その素材として豊かな具体的事象がなければならず，それらから公理を抽出するためには，それらの公理が与えられた多様な事象をよく説明するものでなければならないので，公理系としてあまり勝手なものを選ぶこともできない．それにしても，或る公理系に基づく理論が，'妥当' なものであることは，どのようにして示されるだろうか．与えられた公理系は，'妥当' なものだろうか．用いられる '論理' は '妥当' なものだろうか．（よく知られているように，Brouwer らの直観主義によれば，排中律は必ずしも妥当とはされない．すなわち，或る命題 A の否定の否定は，必ずしも命題 A が正しいことを意味しないと，Brouwer らは主張する．）そもそも，ここでいう，'妥当' とは何を意味するのだろうか．理論が '妥当' であるために必要なこととして，その理論が自己矛盾を含まないこと，すなわち無矛盾であることがあげられる．そして，理論が無矛盾であることを証明するために，与えられた具体的な対象から有限回の操作によって具体的に構成される事柄のみを基礎として用いるというのが Hilbert の '有限の立場' であり，彼の '形式主義' の方法である．数学基礎論の方法としては，この他に Brouwer らの直観主義，Russell らの論理主義などがあることはよく知られているが，これら基礎論に関する論議については，専門書に譲ることとする．

一つの公理系に基づく理論の無矛盾性を証明することは，一般的には容易なことではない．Zermelo, Fraenkel の集合論が無矛盾であるか否かについても，未

---

1) E. Zermelo : Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Ann. **65** (1908), 261-281.

2) A. Fraenkel : Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann. **86** (1922), 230-237.

だ結論は得られていない.

Zermelo, Fraenkel の公理系においては，当然ながら，Russell の背理は解決されている．しかし，Russell の背理をきっかけとして表面化した，集合論および数学の基礎に関する深刻な問題は，未だ解決されたとはいえない．また，仮に或る方法によって集合論の無矛盾性が証明されたとしても，その方法が‘妥当’なものであるか否かという問題は残るであろう.

しかし，人は時には深さの知れない海に，小舟をこぎ出すものである．未だ，その基礎に関する問題を孕むとはいえ，集合論によって現代数学の各分野に共通する諸概念が定式化された．本書においては，集合論の基本的理論を，Zermelo, Fraenkel の方法に従いつつ，できるだけ簡明に，したがって，公理論的に，しかも，素朴に説明することを試みる.

第1章　空集合から自然数まで

——論理学，集合，基本的諸概念——

§1.1　対象，族，命題，論理学

数，図形，関係など数学的操作の対象となるものを，単に**対象** (object) と呼び，対象の集まり——たとえば，自然数全体，平面図形全体，一つの三角形の頂点全体等々——を単に**集まり** (collection) あるいは**族** (family) といおう．(族の中には，集合全体の集まりのようなものも含まれる.) 対象や族は，実は或る公理系を満たす無定義概念であるが，ここでは，詳しいことにはふれないでおこう．'集合' は，つぎの§1.2以下で述べるような公理系を満足させる特別な対象であるが，そのような公理を記述し，そこで現われるいろいろな対象について述べるために，数学的命題が用いられる．数学的命題を使うにあたって，あいまいさを排除するために，いくつかの基本的な構文が設けられ，それらの '文法' ともいうべきものが定められる．これらを記号を用いて述べるものが，'形式論理学' であるが，それについて詳しく説明するためには，一巻の書物を必要とするので，ここでは集合論を叙述するにあたって，その基礎となる論理学的諸命題についての簡単な説明をするのに止めよう．(集合論の叙述は，公理に基づいて厳密に進めることにする.)

'数学的命題' とは，数学的対象について論理記号や演算記号などを用いて記述された文章である．"$2<3$"，"$1+1=2$"，または，"$\triangle ABC$ において，$AB=AC$" などがその例である．このような命題 (proposition) は P, Q などの文字で表わされることが多い．

与えられた命題 P に対して，その否定，すなわち "P ではない" という命題を記号的に $\neg P$ と書く．ここで，つぎの事柄を仮定する．

排中律　数学的命題 P について，P または $\neg P$ のどちらかが成り立ち，それらがともに成り立つことはない．——

"$2<3$" のような命題については上の排中律が成り立つことは自明だが，"任意

の自然数 n について，n よりも大きい素数 p, q で，$q=p+2$ となるものが存在する”というような命題については，この命題が成り立つか否かを確かめることは容易にはできそうには思えない．しかし，このような命題をも含めて，排中律が成り立つということを仮定するのである．序章にも述べたように，この排中律に関しては，Brouwer らによる異論もあるが，われわれはここでは従来の楽観論的立場にくみし，この仮定の上にどのような理論が組み立てられるかを，見ることにする．

命題 P, Q が与えられたとき，P が成り立つか否かに応じて，Q が成り立つか否かが定まることがある．このようなとき，P と Q の関係はつぎのような‘真偽表’と呼ばれるものによって示される．

P	Q
○	○
×	○

ここで，○は‘成り立つ’を，×は‘成り立たない’を意味する．上の表の場合には，P が成り立つときも，そうでないときにも Q は成り立つ．特に，排中律により，一般に

P	$\neg P$
○	×
×	○

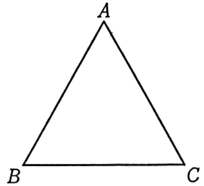
という表が成り立つ．命題 $P, Q, R, \cdots$ などの正否に応じて命題 S の正否が定まる場合には，

P	Q	R	$\cdots$	S
○	○	×	$\cdots$	○
	……			$\cdots$

のような真偽表が用いられる．

例 1.1　命題 P を，“$\triangle ABC$ において $AB=AC$”，命題 Q を，“$\triangle ABC$ において $\angle A=60°$”，命題 R を，“$\triangle ABC$ は正三角形である”とすれば，つぎの真偽表が得られる．

P	Q	R
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	×



命題 P, Q が与えられたとき，“P あるいは Q” という命題，および “P かつ Q” という命題をつくることができる．“P あるいは Q” は，記号的に $P \vee Q$ と書かれ，P, Q の少なくとも一方が成り立つとき，またそのときのみ，成り立つ．“P かつ Q” は $P \wedge Q$ とも書かれ，P, Q がともに成り立つとき，またそのときにのみ，成り立つ．これらを真偽表によって表わせば，つぎのようになる．

P	Q	$P \vee Q$
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	×

P	Q	$P \wedge Q$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	×

また，与えられた命題 P, Q に対して，“P が成り立てば Q が成り立つ” という命題をつくることができる．この命題は記号的に $P \Longrightarrow Q$ または $Q \Longleftarrow P$ と書かれ，これが成り立つとき ‘P から Q が導かれる’ という．たとえば，P として，“$\triangle ABC$ は正三角形である”，Q として “$\triangle ABC$ において $AB=AC$” をとれば，明らかに $P \Longrightarrow Q$ は成り立つが，$Q \Longrightarrow P$ は成り立たない．一般に，$Q \Longrightarrow P$ は，命題 $P \Longrightarrow Q$ の ‘逆’ と呼ばれる．$P \Longrightarrow Q$ が成り立つとき，P は Q の**十分条件**，Q は P の**必要条件**といわれる．また，命題 $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表わし，これが成り立つとき，‘P と Q とは**同値**である’，あるいは，P は Q の

必要十分条件であるという．

さて，上の定義から，一般に命題 P, Q が与えられたとき，“$P \Longrightarrow P \vee Q$”，“$P \wedge Q \Longrightarrow P$” がそれぞれ成り立つ．このように，与えられた命題，定義，それに基本仮定（たとえば排中律が成り立つなど）から，上のような論理的操作によって，或る命題 P が成り立つことが示されたとき，その命題 P を**定理**(theorem)と呼び，それが成り立つことを示す操作を**証明**(proof)と呼ぶのである．ここで，証明のための出発点となる基本仮定は，**公理**(axiom)とも呼ばれる．或る定理を証明するために用いられる補助的な定理を**補題**(lemma)と呼び，或る定理 P から副次的に，‘容易に’得られる定理を P の**系**(corollary)と呼ぶことは，よく知られている通りである．

形式論理学では，上に述べた排中律の他にも，命題 P, Q と $P \vee Q, P \wedge Q$ などの関係などいくつかのものを，厳密に定式化してそれらを公理とし，その上に理論を組み立てる．しかし，本書では，これらの公理，定義を，上述のように‘普通のことば’を用いて述べ，それらに基づいて以下の記述を進めることにする．先に述べたように§1.2以下の集合論の展開においては，もう少し公理主義的に話を進めることにする．

さて，任意の命題 P, Q について，命題

(1.1)　　$$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

が成り立つ．

実際，“$P \Longrightarrow Q$” が成り立つとき “$\neg P \vee Q$” が成り立つことをまず示そう．“$\neg P \vee Q$” は，$\neg P$ または Q の少なくとも一方が成り立つとき，またそのときに限って成り立つのであった．さて命題 P が成り立つとすれば，$P \Longrightarrow Q$ によって Q が成り立つから，$\neg P \vee Q$ も成り立つ．ところが，排中律によって，P または $\neg P$ の一方，一方のみが成り立つのだから，P が成り立たなければ，$\neg P$ が成り立つ．したがってこのとき $\neg P \vee Q$ が成り立つ．こうして“$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (\neg P \vee Q)$” が成り立つことが示された．

逆に，“$\neg P \vee Q$” が成り立ち，しかも P が成り立てば，P と $\neg P$ はともに成り立つことはないから，Q が成り立つ．すなわち，このとき “$P \Longrightarrow Q$” が成り立つのである．

記号 $\Leftrightarrow$ の定義から明らかに，命題 P, Q について $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つことと，

真偽表

P	Q
○	○
×	×

が成り立つこととは，同値である．命題(1.1)が成り立つことおよび $\neg P\wedge Q$ などに関する真偽表によって，つぎのような真偽表が得られる．

P	Q	$P\Longrightarrow Q$
○	○	○
○	×	×
×	○	○
×	×	○

P	Q	$Q\Longrightarrow P$
○	○	○
○	×	○
×	○	×
×	×	○

P	Q	$P\Leftrightarrow Q$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	○

これから，特に，P が成り立たなければ，Q が成り立つか否かに係わらず $P\Longrightarrow Q$ が成り立つことがわかる．

さて，排中律により，命題 $\neg P\wedge P$ は成り立たない．したがって，上に述べたことから Q の正否にかかわらず，命題

$$\neg P\wedge P \Longrightarrow Q \tag{1.2}$$

が成り立つ．

真偽表を用いると，命題 P, Q, R に対して，つぎの (i)-(iv) が成り立つことがわかる．

(i) $P \Leftrightarrow \neg\neg P$

(ii) $P\vee P \Leftrightarrow P,\quad P\wedge P \Leftrightarrow P$ （べき等律）

(iii) $P\vee Q \Leftrightarrow Q\vee P,\quad P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$ （交換律）

(iv) $P\vee(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\vee R,\quad P\wedge(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge R$ （結合律）．

問題 1.1　上の (i)-(iv) が成り立つことを示せ．また，$P\Leftrightarrow Q$ が成り立てば，$P\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$，$P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$ がともに成り立つことを示せ．（真偽表を用いるとよい．）

問題 1.2　命題 P について，

$$(P\Longrightarrow\neg P)\Longrightarrow\neg P$$

が成り立つことを示せ．——

命題 P, Q が与えられたとき，$P \Longrightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$ は (1.1) により同値であるが，上の交換律およびべき等律によって $\neg P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee \neg P \Leftrightarrow \neg\neg Q \vee \neg P$ がそれぞれ成り立つ．ところが再び (1.1) によって $\neg\neg Q \vee \neg P$ と $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ とは同値だから，つぎの命題が成り立つ．

(1.3) $$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P).$$

"$\neg Q \Longrightarrow \neg P$" は，"$P \Longrightarrow Q$" の**対偶**と呼ばれる．

命題 P, Q, R について，つぎの**推移律**が成り立つことは定義から明らかである．

$$(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R).$$

また，命題 P, Q に対してつぎの (i), (ii) (**de Morgan の法則**)が成り立つ．

(i) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

(ii) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.

実際，定義よりつぎの真偽表が得られる．

P	Q	$\neg(P \vee Q)$
○	○	×
○	×	×
×	○	×
×	×	○

P	Q	$\neg P \wedge \neg Q$
○	○	×
○	×	×
×	○	×
×	×	○

これから明らかに，$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ が成り立つことがわかる．(ii) の成り立つことも同様に示されるが，ここでは (1.3) (命題とその対偶が同値であること) を用いれば，(ii) は (i) に帰着される．実際，排中律および (i) により $\neg\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ が成り立つ．そこで $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ の対偶をとれば (ii) が得られる．

帰謬法　命題 P, Q について，$P \Longrightarrow Q \wedge \neg Q$ が成り立てば $\neg P$ が成り立つ．

実際，$P \Longrightarrow Q \wedge \neg Q$ が成り立てばその対偶 $\neg(Q \wedge \neg Q) \Longrightarrow \neg P$ も成り立つが，$\neg(Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg\neg Q \Leftrightarrow \neg Q \vee Q$ がそれぞれ成り立ち，排中律によって $\neg Q \vee Q$ は成り立つから，$\neg P$ が成り立つ．

分配法則　命題 P, Q, R について，つぎの命題が成り立つ．

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R), \qquad (P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R).$$

問題 1.3 上のことを示せ．(真偽表を用いるとよい.)

問題 1.4 $P \Longrightarrow Q$ と $P \vee Q \Longrightarrow Q$ は同値であることを示せ．((1.1)が成り立つこと，de Morgan の法則，分配法則および問題1.1の結果を用いるとよい.)

——

対象 x についての命題を，$P(x)$ のように表わすことがあり，$P(x)$ を x を**変数** (variable) とする命題と呼ぶ．この場合，x は或る定められた集まりまたは族に属するものとされることが多い．

例 1.2 自然数全体の族 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ を $\bar{\boldsymbol{N}}$ と書く．($\bar{\boldsymbol{N}}$ が集合とみなせることは，後に§1.5で述べる.) 自然数 a が与えられたとき，自然数 n についての命題 $P_a(n)$ を，“自然数 n は，$n \geqq a$ を満たす”というものとすれば，$(P_a(n) \Longrightarrow P_b(n)) \Longleftrightarrow a \geqq b$ が成り立つ．また $P_a(n) \vee P_b(n) \Longleftrightarrow P_{\min(a,b)}(n)$，$P_a(n) \wedge P_b(n) \Longleftrightarrow P_{\max(a,b)}(n)$ がそれぞれ成り立つ ($\min(a, b)$, $\max(a, b)$ は，それぞれ a, b の最小値，最大値である)．de Morgan の法則，分配法則が成り立つことを，この具体的な命題の場合に確かめて見られたい．——

与えられた族に属する任意の対象 x について，命題 $P(x)$ が成り立つことを主張する命題を，記号的に $\forall x P(x)$ と書く．$\forall x$ は，‘すべての(または，任意の) x について’と読まれる．($\forall x P(x)$ は，“For all x, $P(x)$ (holds)” の記号化である.) 上の例1.2の場合には，“$\forall$自然数 $n P_0(n)$” が成り立つ．

与えられた族に属する対象 x で，$P(x)$ を成立させるようなものが存在することを主張する命題は，$\exists x P(x)$ と書かれる．($\exists x P(x)$ は，“There exists x such that $P(x)$ (holds)” の記号化である.) 上の例1.2の場合，任意の自然数 a について $P_a(n)$ を満たすような自然数 n が存在するから，“$\forall a \exists n P_a(n)$” が成り立つ．(この命題のように，$a$ や n がそれぞれどういう族に属するものかがよくわかっているときには，$\forall$自然数 $a \cdots$ のように，いちいちことわらないことがある.)

$\forall$ および $\exists$ は**限定記号**と呼ばれ，対象 x の前にそれらが記されるとき，x は**束縛されている**という．束縛されていない対象は**自由**であるといい，命題 $P(x)$ において x が自由であるとき，$P(x)$ は x を**自由変数**とする命題であるという．

与えられた族に属する対象 x についての命題 $P(x)$ が与えられたとき，つぎのことが成り立つ．

$$\neg(\forall x P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \neg P(x). \tag{1.4}$$

実際，もしも $\exists x \neg P(x)$ が成り立てば，与えられた族に属する対象 a で，$P(a)$ が成り立たないものがあるから，$\forall x P(x)$ という命題は，明らかに成り立たない．一方，$\forall x P(x)$ が否定されれば $\neg P(x)$ が成り立つような x が存在しなければならない．

§1.2 外延性公理，集合

集合論で扱われる対象を**集合** (set) と呼ぶ．集合とは，以下に終章までにわたって述べる集合論の公理 S 1)–S 10) を満たすような対象である．集合を基礎的な素材とし，‘数’，‘関数’ などの数学的諸対象を再構成し，しかも ‘集合全体の集まり’ というような怪物は，集合の世界からしめ出そうというのが，以下の公理 S 1)–S 10) を設ける目的である．

集合を表わすのに，$a, b, c, \cdots, x, y, z, A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ などの文字が使われる．集合論的命題を作るのに使われる記号としては，§1.1 であげた論理記号の他に $\in$ (または $\ni$) がある．命題

$$(*) \qquad a \in b \qquad (\text{または } b \ni a)$$

は，‘a は b の**元** (または**要素**) (element) である’ または，‘b は a を (元として) 含む’ と読まれ，$(*)$ の否定命題 $\neg(a \in b)$ は $a \notin b$ (または $b \not\ni a$) とも書かれる．記号 $\in$ の重要性は，つぎの公理からもわかる．

S 1) (外延性公理) $\forall a \forall b [a=b \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in b)]$.

外延性公理を ‘普通のことば’ で述べれば，“任意の集合 a, b について，$a=b$ となるための必要十分条件は，任意の x に対して，$x \in a \Leftrightarrow x \in b$ が成り立つことである” となる．この公理によれば，集合は，それがどのような元を含むかによって決定される．集合に含まれる元同士が，どのように関係し合っているかということは，その集合の，‘集合論的特徴づけ’ には関与しないのである．

集合 a, b について，$\forall x (x \in a \Longrightarrow x \in b)$ が成り立つとき，‘a は b の**部分集合** (subset) である’ といい，これを $a \subset b$ または $b \supset a$ と表わし，このとき b は a を部分集合として含むともいう[1]．$a \subset b \wedge a \neq b$ が成り立つとき，a は b の**真部分集合** (proper subset) と呼ばれ，このとき $a \subsetneqq b$ または $b \supsetneqq a$ と書く．

---

1) $a \subset b$ を $a \subseteq b$ あるいは $a \subseteqq b$ のように表わす書物もある．

定理 1.1　集合 a, b, c についてつぎの (i), (ii), (iii) が成り立つ．

(i)　$a \subset a$

(ii)　$a \subset b \wedge b \subset a \Leftrightarrow a = b$

(iii)　$a \subset b \wedge b \subset c \Longrightarrow a \subset c.$

証明　(iii) についてのみ証明を行なう．((i), (ii) については，読者自ら試みられたい.)　$a \subset b \wedge b \subset c \Leftrightarrow \forall x[(x \in a \Longrightarrow x \in b) \wedge (x \in b \Longrightarrow x \in c)] \Longrightarrow \forall x(x \in a \Longrightarrow x \in c)$ (推移律による) $\Leftrightarrow a \subset c$ だから，明らかに (iii) が成り立つ．▌

つぎの公理は，集合が(少なくとも一つ)存在することを主張するものである．ただ‘集合が存在する’というだけではとらえ所もなく，抽象的に過ぎるので，ある具体的な集合を，論理学の用語によって，厳密に規定しようというのである．

S 2) (空集合の存在公理)　　$\exists a \forall x[\neg(x \in a)]$.

‘普通のことば’で述べれば，この公理は“どのような元をも含まない集合 a が存在する”ということを主張している．この公理 S 2) の条件を満たすような集合 a を**空集合** (empty set) と呼び ϕ で表わす．(つぎの定理 1.2 の系によって，空集合は確定すること，すなわち，a, b がともに S 2) の条件を満たすならば $a = b$ となることが示される.)

定理 1.2　集合 a が空集合となるための必要十分条件は，a が任意の集合 x の部分集合となることである．

証明　まず，ϕ を (一つの)空集合とし，$\forall x(x \supset \phi)$ が成り立つことを示そう．そのためには，$\forall y(y \in \phi \Longrightarrow y \in x)$ を示せばよい．ところが，命題“$y \in \phi \Longrightarrow y \in x$”の対偶は，“$\neg(y \in x) \Longrightarrow \neg(y \in \phi)$”であるが，空集合の定義により，これは任意の y について成り立つ．したがって，$\forall y(y \in \phi \Longrightarrow y \in x)$ も成り立ち，$\forall x(x \supset \phi)$ が示された．つぎに，集合 a について，$\forall x(a \subset x)$ が成り立つとすると，特に $a \subset \phi$ となるが，いま見たことから $\phi \subset a$，したがって，定理 1.1 (ii) により $a = \phi$ となり，a は空集合となる．▌

系　空集合は確定する．

証明　a, b について，$\forall x[\neg(x \in a)]$, $\forall x[\neg(x \in b)]$ がともに成り立つとすれば，定理により $a \subset b \wedge b \subset a$ が成り立ち，したがって定理 1.1 (ii) により $a = b$ となる．▌

このように，数学的宇宙全体をその視野の中に捉えようとする集合論にとって，

'何ものをも含まない'空集合が，その最初の'具体的'な獲物として得られた．実は以下に述べるように，空集合から自然数，整数，有理数，実数等々が'生み出される'! そしてそのような'数学的宇宙創成'の過程で必要になるものとしてZermelo, Fraenkel の集合論の諸公理および，対応，写像，関係などの基本的諸概念を'自然に'導入することができる．

§1.3 非順序対，合併，無限公理

1個，2個，3個の集合，あるいは一般に n 個の集合 $a, b, c, \cdots, d$ が与えられたとき，それらを元とする集合 $\{a, b, c, \cdots, d\}$ が存在するということは，殆ど'常識'のようになっている．しかし，いま，われわれは $1, 2, 3$ または n などという概念については，'知らない'ものとして議論を進めているのである！ ここで，つぎの公理が上のような'常識'を厳密に基礎づけるための出発点となる．

S 3)（非順序対の存在公理） $\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \Leftrightarrow x=a \vee x=b)$.

'普通のことば'で述べれば，"任意の集合 a, b に対して a, b を元として含み，それら以外の元を含まない集合 c が存在する"というのが公理 S 3) の内容である．外延性公理によって，a, b が与えられたとき上の公理 S 3) によって存在を主張される集合 c は，確定する．この集合 c は，a, b の**非順序対** (unordered pair) と呼ばれ，$\{a, b\}$ と書かれる．$x=a \vee x=b$ と $x=b \vee x=a$ は同値だから，公理 S 1) によって，$\{a, b\} = \{b, a\}$ が成り立つ．

$\{a, a\}$ を a の**シングルトン** (singleton) と呼び，$\{a\}$ と書く．空集合 ϕ のシングルトン $\{\phi\}$ は，もはや空集合ではない！ $\{\phi\}$ は ϕ という集合を元として含むからである．こうして，公理 S 3) によって，空集合とは異なる集合 $\{\phi\}$ が存在することが示される！

問題 1.5 つぎの (i), (ii), (iii) が成り立つことを示せ．

(i) $\{a, b\} = \{a\} \Leftrightarrow a = b$

(ii) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\} \Leftrightarrow a = b$

(iii) $\{\phi\} \supsetneqq \phi$, $\{\phi, \{\phi\}\} \supsetneqq \{\phi\}$. ——

集合 a, b, c が与えられたとき，公理 S 3) によって $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}$ などが存在する．さらに，$\{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}$ なども存在するが，常識的に $\{a, b, c\}$ と書かれる集合の存在は示されるだろうか．乱暴な言い方をすれば，

$\{a, b, c\}$ は，集合 $\{a, b\}$ と $\{c\}$ の非順序対 $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ の‘内部的な壁を取り除く’ことによって得られる．一般に，或る集合の元がそれぞれまた集合 $a, b, \cdots$ であるとき，$a, b, \cdots$ の元を‘つき混ぜて’或る集合を得るという操作を許すものが，つぎの公理である．

S 4)（合併集合の公理） $\forall a \exists b \forall x[x \in b \Longleftrightarrow \exists c(c \in a \wedge x \in c)]$.

‘普通のことば’で上の公理の内容を述べれば，“任意の集合 a に対して，集合 b が存在し，任意の x に対して，$x \in b$ となることと，x が，a に含まれる或る元 c の元となることが同値となる”ということになる．ここで，b は‘a の元の元全体から成る集合’と呼ばれる．外延性公理 S 1) により，明らかに上の b は a によって確定する．この b を，‘a **に含まれる集合全体の合併**’と呼び，$\bigcup_{c \in a} c$ または $\bigcup a$ と表わす．

集合 a, b に対して，$c = \{a, b\}$ とするとき，$\bigcup c$ を a, b の**合併（集合）**(union) と呼び，$a \cup b$ と表わす．

上の定義から明らかに，$\forall x(x \in a \cup b \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b)$ が成り立つ．

定理 1.3 集合 a, b, c に対して，つぎの (i)-(v) が成り立つ．

(i) $a \cup a = a$ **（べき等律）**

(ii) $a \cup b = b \cup a$ **（交換律）**

(iii) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ **（結合律）**

(iv) $a \subset b \Longleftrightarrow a \cup b = b$

(v) $a \cup \phi = a$.

問題 1.6 上の定理を証明せよ．［ヒント］(ii), (iii) は§1.1 に述べた命題の交換律および結合律により容易に示される．(iv) は問題 1.4 の結果を用いて証明される．(i), (v) は，定理 1.1, 1.2 によって，(iv) から導かれる．——

明らかに，$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ となり，したがって，$\{a, b\} \cup \{c\} = (\{a\} \cup \{b\}) \cup \{c\} = \{a\} \cup \{b, c\} = \{a\} \cup \{c, b\} = \{a, c\} \cup \{b\} = \cdots$ となる．$\{a, b\} \cup \{c\}$ を $\{a, b, c\}$ とも表わし，これを‘a, b, c から成る**（非順序）組**’と呼ぶ．$\{a, b, c\} \cup \{d\}$ を $\{a, b, c, d\}$ と書くこと等々も同様である．

さて，前節の終りの部分で，空集合 ϕ が集合として確定することを述べた．また，ϕ のシングルトン $\{\phi\}$ が ϕ とは異なる集合であることについても述べた．また，$\{\phi, \{\phi\}\} = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} \supsetneqq \{\phi\}$ となる（問題 1.5）．このようにして，‘つぎつぎ

に'新しい集合を構成してゆくことができそうである！ 自然数論を，こうして集合論的に基礎づけ，自然数1, 2, 3, … および0が'存在'し，いろいろの'知られた'性質を持つということを，証明することができそうに見える．そのためにまず，'0', '1', '2', … なる対象を集合論的に与えなければならない．ここで'常識'とはそぐわないが，われわれの手にある限られた素材から'数'を構成するために，$0=\phi$, $1=\{\phi\}=0\cup\{0\}$, $2=1\cup\{1\}=\{\phi, \{\phi\}\}=\{0,1\}$, $3=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}$ 等々と定義する．ここで，'等々'の意味を明らかにしなければならない．

一般に集合 a が与えられたとき，集合 $a\cup\{a\}$ (公理 S3), S4) によってこれは存在する)を a の**後継ぎ**と呼び，a^+ と表わすことにする．たとえば，$1=0^+$, $2=1^+$, $3=2^+$ である．こうして，0から始めてその後継ぎをつぎつぎにとって，1, 2, 3, $4=3^+$, '等々'が得られるのである．さて，このようにして得られる集合'全体'がまた集合となるだろうか．もしもそうならば，そのような集合を'自然数全体から成る集合'と呼んでもよさそうである．この問に対処するための第一歩を踏み出すために，つぎの公理を用いる．

S5)(無限公理)　　$\exists a[\phi\in a\wedge\forall x(x\in a\Longrightarrow x^+\in a)]$.

'普通のことば'で上の公理の内容を述べれば，"集合 a で，ϕ を含み，かつ任意の集合 x について，$x\in a$ ならば $x^+\in a$ となるようなものが存在する"．'無限'とか'有限'という概念は，後に(§2.2)定義されるが，上の公理が'無限公理'と呼ばれることは，直観的にはうなずけるであろう．集合 a が上の公理 S5) の条件を満たすとき，a を**無限系譜**と呼ぶことにする．ところで，このような無限系譜は，S5) によって存在はするが，確定しそうには感じられない．'直観的'に考えても，a を或る無限系譜，x を任意の集合とし，x の後継ぎ x^+, その後継ぎ $(x^+)^+$, … を'全部合わせたもの'を $\tilde{x}$ とし，$a\cup\tilde{x}$ を考えれば，これはまた無限系譜になりそうである．'自然数全体'という集合を構成するためには，無限系譜 a から，'無駄なものを取り除く'というような操作をすることが必要になる．このように，或る集合 a の'錆を落とす'操作を可能にするために，次節で述べられる'分出公理' S6) を用いる．

§1.4　分出公理，共通部分，べき集合

任意の集合 a において，その元で'特定の条件'を満たすもの全体がまた集合

となることを主張するのがつぎの公理である．

S 6)（分出公理）　$P(x)$ を集合 x を自由変数とする命題とすると，つぎのことが成り立つ．

$$\forall a \exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge P(x)).$$

‘普通のことば’で上の公理の内容を述べれば，“任意の集合 a に対して，$P(x)$ を成り立たせるような a の元 x の全体から成る a の部分集合 b が存在する”．外延性公理 S 1) によって，このような b は確定し，$\{x \in a \mid P(x)\}$ と表わされる．ここで，つぎの定理が得られる．

定理 1.4　集合 a に対して，$a' = \{x \in a \mid x \notin x\}$ とすると，$a' \notin a$.

証明　命題 P として $a' \in a$ を，命題 Q として $a' \in a'$ をとり，$P \Longrightarrow Q \wedge \neg Q$ が成り立つことを示そう．そうすれば，帰謬法によって $\neg P$ すなわち $a' \notin a$ が成り立つのである．P が成り立つとすると，明らかに $\neg Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ が成り立つが，a' の定義によって $P \wedge \neg Q$ すなわち $(a' \in a) \wedge (a' \notin a')$ と Q すなわち $a' \in a'$ とは同値である．ゆえに，$P \Longrightarrow (\neg Q \Leftrightarrow Q)$ という命題が成り立つが，$\neg Q \Leftrightarrow Q$ は $Q \wedge \neg Q$ と同値である(§1.1, (1.1))から，$P \Longrightarrow Q \wedge \neg Q$ が成り立つことがわかった．▌

系　$\forall a \exists b (b \notin a)$.　——

上の系によって，どのような集合 a をとっても，a には含まれないような集合（たとえば a'）が存在することがわかる．したがって，‘集合全体の集まり’は集合ではないということになり，Russell の背理は回避されたことになる．

集合 a, b に対して，$\{x \in a \mid x \in b\}$ を a, b の**共通部分**と呼び $a \cap b$ と表わす．

定義によって，明らかにつぎの命題が成り立つ．

$$\forall x (x \in a \cap b \Leftrightarrow x \in a \wedge x \in b).$$

このことから容易につぎの定理が得られる．

定理 1.5　集合 a, b, c についてつぎの (i)-(v) が成り立つ．

(i)　$a \cap a = a$　**（べき等律）**

(ii)　$a \cap b = b \cap a$　**（交換律）**

(iii)　$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$　**（結合律）**

(iv)　$a \subset b \Leftrightarrow a \cap b = a$

(v)　$a \cap \phi = \phi$.

問題 1.7　上の定理を証明せよ．——

前節で定義された集合 $0, 1, 2, 3, \cdots$ について，$0\cap a=0$，$1\cap 2=1$，$1\cap 3=1$，$2\cap 3=2$，$\cdots$ が成り立つ．

命題についての分配法則によってつぎの定理が得られる．

定理 1.6(分配法則)　集合 a, b, c に対してつぎのことが成り立つ．

$$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c),\qquad a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c).$$

問題 1.8　上の定理を証明せよ．——

集合 a, b, c に対して $(a\cap b)\cap c$ を'a, b, c の共通部分'と呼び，$a\cap b\cap c$ とも表わす．定理 1.5 (iii) によって，この呼び方は妥当なものであることが，わかるであろう．同様に $(a\cap b\cap c)\cap d$ を'a, b, c, d の共通部分'と呼び，$a\cap b\cap c\cap d$ と書く．さて，このようなことを一般的に考えるために，a を或る集合の集合で空集合とは異なるものとし，$b\in a$ に対して $\bar{b}=\{x\in b\mid \forall y(y\in a\Longrightarrow x\in y)\}$ を考えよう．$\bar{b}$ は b の元で a のすべての元に含まれるもの全体から成る b の部分集合である．たとえば，$a=\{1, 2\}$，$b=2=\{0, 1\}$ とするとき，$\bar{b}=\{0\}=1$ である．(ここで，$\tilde{a}=\{x\in a\mid \forall y(y\in a\Longrightarrow x\in y)\}$ とおくと，$\tilde{a}=\phi$ となることに注意しよう.)

一般に，任意の x について，$b\in a$ から，つぎの命題が成り立つことがわかる．

$$x\in\bar{b}\iff\forall y(y\in a\Longrightarrow x\in y).$$

したがって，もしも $c\in a$ ならば，$\bar{b}=\bar{c}$ となり，$\bar{b}$ は a の元 b のとり方によらずに定まる．$\bar{b}$ を，**a の元の共通部分** (intersection) と呼び，$\bigcap_{x\in a}x$ または $\bigcap a$ と書く．特に，$a=\{b, c\}$ のとき，a の元の共通部分は $b\cap c$ に他ならない．また一般に $a\neq\phi$ のとき，a の任意の元 y に対して，

$$\bigcap a\subset y$$

となる．

上に定義された，a の元の共通部分という概念は，後に (§1.5)'自然数全体の集合'を構成する際に有効に使われる．

集合 a, b に対して，$\{x\in a\mid x\notin b\}$ を a, b の**集合論的差** (set theoretical difference) と呼び，$a-b$ と表わす．

上の定義により，明らかにつぎの命題が成り立つ．

$$x\in a-b\iff x\in a\wedge x\notin b.$$

問題 1.9　集合 a, b についてつぎの (i), (ii) が成り立つことを証明せよ．

(i)　$a \cap b = \phi \Leftrightarrow a - b = a$

(ii)　$a \subset b \Leftrightarrow a - b = \phi$. ——

上の問題から，特に $a-\phi=a$, $a-a=\phi$ が任意の集合 a について成り立つことがわかる．前節で定義した記法によれば，$a-0=a$, $a-a=0$ である．また，$2-1=\{0,1\}-\{0\}=\{1\}$, $3-1=\{0,1,2\}-\{0\}=\{1,2\}$ となり，集合論的差と，'常識的な数の差'とは異なる概念であることがわかる．

集合 s, a について，$s \supset a$ であるとき，$s-a$ を a の s に対する**補集合** (complement) と呼び，特に s が与えられていて s を明示する必要のないときは，これを a^c と表わす．

問題 1.10　集合 s とその部分集合 a, b が与えられたとき，つぎの (i)-(vii) が成り立つことを示せ．

(i)　$(a^c)^c = a$

(ii)　$s^c = \phi$

(iii)　$\phi^c = s$

(iv)　$a \cap a^c = \phi$

(v)　$a \cup a^c = s$

(vi)　$a \subset b \Leftrightarrow a^c \supset b^c$

(vii) (**de Morgan の法則**)　$(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$,　$(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$. ——

さて，'自然数'を構成する話にもどろう．前節で述べたように，0 とその後継ぎたち 1, 2, … '全体'の集まりとして'自然数全体の集合'なるものを考えるのが，いかにも'自然'である．ところが，われわれが無限公理 S5) によって保証されていることは，0 およびその後継ぎたちをすべて含む集合，すなわち無限系譜なるものが存在するということだけであり，そのような無限系譜は'自然数'以外にもいろいろ'余計なもの'を含んでいる可能性がある．それでは，そのような無限系譜'全体'の共通部分をとれば，'自然数全体の集合'が得られるのではないだろうか．これは，確かにもっともな考え方であるが，一つ難点がある．というのは，'無限系譜全体の集まり'なるものが，集合となるかどうかについては，何ともいえそうにないからである！　しかし，'無限系譜全体の集まり'を考えて，それらの中に含まれる'自然数全体の集合'をさぐり出すというのは，あたかも木の幹に達するために，1 本の木の葉や枝をすべて切りとるようなやり方であり，同じ目

的のためには，ただ1本の枝をとり，それを‘もとへもとへ’とたどればよいのである！　すなわち，われわれの目的のためには，どれでも一つの無限系譜をとり，それに含まれる無限系譜すべての共通部分をとればよい．これは，‘無限系譜全体の集まり’というようなとらえ所のない代物よりは，扱い易そうである．ところが，まだ一つの問題が残る．すなわち，或る無限系譜が与えられたとき，‘それに含まれる無限系譜全体’は，果して集合だろうか．より一般に，或る集合 a が与えられたとき，‘a の部分集合全体’は，また集合になるだろうか．この問に肯定的に答えるために，つぎの公理が導入される．

S 7)（べき集合の公理）　$\forall a \exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow x \subset a)$.

すなわち，任意の集合 a に対して，a の部分集合全体から成る集合 b が存在することを，上の公理は主張する．この集合 b は，外延性公理によって確定し，a の**べき集合**(power set)と呼ばれ，$\mathcal{P}(a)$ と表わされる．べき集合の公理によって，一つの無限系譜に含まれる無限系譜全体から成る集合が存在することが示され，その共通部分として‘自然数全体’なる集合が得られるのであるが，それは次節で述べることとし，ここでは，べき集合 $\mathcal{P}(a)$ についていくつかの事柄を見ておこう．

例 1.3　集合 a, b に対して，$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$, $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ となる．

例 1.4　集合 a, b に対して，つぎの命題が成り立つ．

$$a \subset b \Leftrightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(b).$$

実際，$a \subset b \Longrightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(b)$ が成り立つことは明らかである．逆に $\mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(b)$ が成り立てば，明らかに $a \in \mathcal{P}(a)$ だから，$a \in \mathcal{P}(b)$ となるが，$\mathcal{P}(b)$ の定義により，これは $a \subset b$ を意味する．

問題 1.11　集合 a, b に対して，つぎの命題が成り立つことを示せ．

$$\mathcal{P}(a \cap b) = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b), \qquad \mathcal{P}(a \cup b) \supset \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b).$$

また，$\mathcal{P}(a \cup b) \supsetneqq \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$ となるような a, b の例を求めよ．

§1.5　自 然 数

集合 x について，“x は無限系譜である”という命題を $M(x)$ と表わそう．正確には，$M(x)$ は

$$\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \Longrightarrow y^+ \in x)$$

という命題である(公理 S 5) 参照). さて, 空集合とは異なる集合 a について,

$$\forall x(x \in a \Longrightarrow M(x))$$

という命題が成り立つとき, a を‘無限樹’と呼ぶことにしよう. たとえば, 或る無限系譜 x のシングルトン $\{x\}$ は無限樹である. 無限公理 S 5) によって, 無限樹は存在する. 適当な無限樹を‘刈り込んで’, ‘自然数全体’なる集合を得ようというのが目的である. まず, つぎの補題は明らかである(証明は読者自ら試みられたい).

補題 1.1 無限樹 a, b についてつぎの (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\bigcap a$ は無限系譜である

(ii) $a \subset b \Rightarrow \bigcap a \supset \bigcap b$. ——

さて, a を無限系譜とし,

$$\tilde{a} = \{x \in \mathcal{P}(a) \mid M(x)\}$$

とおこう. すなわち, $\tilde{a}$ は a に部分集合として含まれる無限系譜全体から成る集合である. べき集合の公理 S 7) および分出公理 S 6), さらに無限公理 S 5) によって $\tilde{a}$ は集合であり, 外延性公理 S 1) によって $\tilde{a}$ は a によって確定する. ここで, $\tilde{a} \ni a$ だから $\tilde{a} \neq \phi$ であり, $\tilde{a}$ は無限樹である. さて,

$$\omega_a = \bigcap \tilde{a}$$

とおこう. 上の補題によって ω_a は無限系譜であり, 明らかに $\omega_a \in \tilde{a}$ となる. いま b を任意の無限系譜とすると, $a \cap b$ はまた無限系譜だから, 上の補題により $\omega_{a\cap b} \supset \omega_a$ となる. ここで, z を $\omega_{a\cap b}$ の任意の元, $x \in \tilde{a}$ としよう. すると $x \cap b \subset a \cap b$, しかも $x \cap b$ は無限系譜となるから $x \cap b \in \widetilde{a \cap b}$, ゆえに $z \in x \cap b$, したがって $z \in x$ が成り立つ. こうして, $z \in \omega_a$, ゆえに $\omega_{a\cap b} \subset \omega_a$ が示される. したがって, $\omega_a = \omega_{a\cap b}$. これが, 任意の無限系譜 a, b について成り立つのだから, $\omega_a = \omega_{a\cap b} = \omega_b$ となる. こうして, 無限系譜 ω_a は a の選び方に係わりなく確定し, 任意の無限系譜の部分集合となることがわかった. この ω_a を単に ω と書き, これを**自然数全体の集合**と呼ぶ. ω は $\bar{N}$ と書かれることもある. ω は $0, 1, 2, \cdots$ を元として含む. ω の元を**自然数** (natural number) と呼ぶ.

$0 = \phi$, $1 = \phi \cup \{\phi\} = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ 等はみな‘具体的’な集合であった. ω は無限系譜の中でも‘輪郭’のはっきりとしたものであり, われわれが得

た集合の中で‘具体的’な，しかも自明ではないものとしては最初のものである．ところで，ω は果してわれわれが慣れ親しんで来た‘自然数全体の集合’と同一視してもよいものだろうか．たとえば，上の定義によれば $1\subset 2\subset 3\cdots$ のような関係があり，これは‘普通の’自然数の間には見られないことである．しかし，これはわれわれが $0,1,2,3,\cdots$ を構成するために用いた素材に基づく性質とも言えるものである．$0,1,2,3,\cdots$ を表わすのに零,一,二,三,… と書けば，それらは図形的には $0,1,2,3,\cdots$ とは異なるが，それらの‘算術的性質’は変わらない筈である．これと同じように，われわれが構成した‘集合論的’自然数が，‘普通の自然数’と同じ‘算術的性質’を持つことが示されるだろうか．

さて，‘自然数の集合の算術的性質’には種々のものがあるが，それらはいくつかの基本的な諸性質から導かれる．そのような基本的性質としてあげられるのが，‘Peano の公理’である．すなわち，集合 a がつぎの命題 P1)-P4)——a についての **Peano の公理**と呼ぶ——を満たせば a は‘自然数の集合の算術的性質’として知られたものを持つということが示されるのである．

P1)　$x\in a$ ならば x' と表わされる a の元が確定する

P2)　a の元 ν で，a の任意の元 x に対して $x'\neq\nu$ となるものが存在する

P3)　$b\subset a$, $\nu\in b$, しかも $\forall x(x\in b\Longrightarrow x'\in b)$ が成り立てば $b=a$

P4)　$x\in a$, $y\in a$, しかも $x'=y'$ ならば $x=y$.

上の P3) は**数学的帰納法の原理**として知られる．

定理 1.7　集合 ω について，Peano の公理が成り立つ．ただし，$x\in\omega$ について $x'=x^+=x\cup\{x\}$ とし，$\nu=0$ とする．

証明　P1) が成り立つことは明らかである．また P3) に現われる b は無限系譜であるから $\omega\subset b\subset\omega$, ゆえに $b=\omega$ となり，P3) が成り立つ．P2) についても，$\nu=0=\phi$ であり，$x'=x\cup\{x\}\ni x$ だから，明らかに $x'\neq 0$. P4) を示すために，$x\in\omega$, $y\in\omega$ とし，$x^+=y^+$ としよう．$x\in x^+=y^+=y\cup\{y\}$ であるから，$x\in y$ または $x=y$ が成り立つ．同様にして，$y\in x^+$, したがって，$y\in x$ または $y=x$ が成り立つ．いま $x=y$ (または $y=x$) が成り立つことがいえればよい．ところで $x\in y$ (または $y\in x$) からどういうことが導かれるだろうか．それを見るためにつぎの補題を用いる．

補題 1.2　ω の元 x,y について，$x\in y\Longleftrightarrow x\subsetneq y$. ——

この補題の証明は後まわしにして，定理の証明を続けよう．上に見たように，$x^+=y^+ \Longrightarrow x=y \vee (x\in y\wedge y\in x)$ であるが，補題により $x\in y\wedge y\in x \Longrightarrow x\subsetneqq y \wedge y\subsetneqq x \Longleftrightarrow x\subset y\wedge y\subset x\wedge x\neq y$ となるが定理1.1によりこれは明らかに矛盾である．したがって $x^+=y^+ \Longrightarrow x=y$ が成り立つ．▌

補題 1.2 の証明　$y=0=\phi$ ならば，どのような x に対しても $x\in y$ も $x\subsetneqq y$ も成り立たない．したがって P, Q を任意の命題とするとき $x\in 0 \Longrightarrow P$, $x\subsetneqq 0 \Longrightarrow Q$ はともに成り立つ（§1.1参照）．ゆえに，このとき補題は成り立つ．さて，ω について Peano の公理 P 3) が成り立つことは，補題を用いることなしに証明されているから，ω の元 y に関するつぎの命題 P_1, P_2 が示されればよい．

P_1: "$\forall x(x\in\omega\wedge x\in y \Longrightarrow x\subsetneqq y)$" $\Longrightarrow$ "$\forall x(x\in\omega\wedge x\in y^+ \Longrightarrow x\subsetneqq y^+)$"

P_2: "$\forall x(x\in\omega\wedge x\subsetneqq y \Longrightarrow x\in y)$" $\Longrightarrow$ "$\forall x(x\in\omega\wedge x\subsetneqq y^+ \Longrightarrow x\in y^+)$".

まず P_1 を示そう．$x\in\omega$ に対して $x\in y^+=y\cup\{y\}$ となれば，$x\in y \vee x=y$ である．もし $x\in y$ ならば，仮定によって $x\subsetneqq y$ となり，このとき明らかに $x\subsetneqq y^+$ が成り立つ．また $x=y$ ならば明らかに $x\subset y^+$ である．ここで $y\neq y^+$ が示されれば，$x\subsetneqq y^+$ がいえる．もしも $y=y^+$ ならば y^+ の定義より $y\in y$ となるが，ここで仮定 $\forall x(x\in\omega\wedge x\in y \Longrightarrow x\subsetneqq y)$ を用いれば，今の場合 $x=y$ だから，$y\in y$ より $y\subsetneqq y$ が導かれ，特に $y\neq y$ となるからこれは矛盾である！　ゆえに，$y\subsetneqq y^+$ となり P_1 が示された．

P_2 が成り立つことをつぎに示そう．$x\in\omega$ について $x\subsetneqq y^+$ となるとき，もし $y\in x$ ならば P_1 により $y\subsetneqq x$ となり，したがって $y\cup\{y\}\subset x$ となるが，これは $x\subsetneqq y^+$ に矛盾する．ゆえに $y\notin x$ であるが，このとき $x\subsetneqq y^+=y\cup\{y\}$ から明らかに $x\subset y$ が導かれる．$x\subset y \Longleftrightarrow x\subsetneqq y \vee x=y$ であり，仮定から $x\subsetneqq y \Longrightarrow x\in y \Longrightarrow x\in y^+$ となり，さらに $x=y \Longrightarrow x\in y^+$ であるから，P_2 が成り立つことが示された．▌

補題 1.2 の系 1　ω の任意の元 x に対して，$x\subsetneqq x^+$, $x\notin x$ がともに成り立つ．

証明　もし $x\in x$ ならば補題1.2によって $x\subsetneqq x$ となりこれは矛盾である．ゆえに $x\notin x$．したがって，$x\subsetneqq x^+=x\cup\{x\}$．▌

補題 1.2 の系 2　ω の元 a, b, c について，$a\in b\wedge b\in c \Longrightarrow a\in c$ が成り立つ．

――

ω の元すなわち自然数を一般に n, m などと表わすことにする．ω について数

学的帰納法の原理 P3) が成り立つことから，容易につぎの定理が得られる．

定理 1.8(**数学的帰納法**)　自然数 n に関する命題 $P(n)$ について，つぎの (i), (ii) が成り立てば，任意の自然数 n について $P(n)$ が成り立つ．

(i)　$P(0)$ は成り立つ

(ii)　$\forall n(n \in \omega \wedge P(n) \Longrightarrow P(n^+))$.

系
$$n \in \omega, \quad a \in n \Longrightarrow a \in \omega.$$

問題 1.12　上の定理および系を証明せよ．——

こうして，公理 S1)-S7) までを基礎として自然数および自然数全体の集合を集合論的に構成することができた！　実は，これらの公理のみを用いて整数，有理数，実数などを集合論的に構成することができる．しかし，このようにして得られる様々の‘無限’集合同士を‘比較’するためには，以上に述べた公理の他にあと二つの公理を付け加えることが必要になる．そのことについては後に (§4.4-§6.4) 述べよう．

さて，われわれはこれまで極めて抽象的な宇宙を旅した末に，住みなれた自然数とおぼしき世界にたどりついたのであるが，子供でも知っている筈の関係 $1+1=2$, $1+2=3$ などについては，われわれは厳密にはまだ何も知らないのである！ $1+1$，より一般に自然数 n, m の和 $n+m$，積 nm などの定義を与え，それらの性質について見るために，われわれは写像の概念を用いることにするが，その前に自然数の間の‘大小関係’ $1<2$, $2<5$，等々について見ておこう．

第2章　自然数，対応，写像，代数系

§2.1　自然数の大小

ω の元 m, n に対して，$m \subset n$ のとき **m は n を超えない**といい，$m \leqq n$ または $n \geqq m$ と書くことにする．特に $m \leqq n$ かつ $m \neq n$ のとき **m は n より小さい**，または **n は m よりも大きい**といい，$m < n$ または $n > m$ と書く．たとえば，$0 < \{0\} = 1 < \{0, 1\} = 2$．この定義から直ちに，

(2.1)　$$m \leqq n \wedge n \leqq m \Leftrightarrow n = m$$

(2.2)　$$m \leqq n \wedge n \leqq r \Rightarrow m \leqq r$$

が成り立つことがわかる．$m \leqq n \wedge n \leqq r$ のことを，単に $m \leqq n \leqq r$ のようにも書くことにする．一般に，前節の補題1.2の系1により，$n \in \omega$ に対して $n < n^+ = n \cup \{n\}$ となるが，さらに $m, n \in \omega$ に対して

(2.3)　$$m < n \leqq m^+ \Rightarrow n = m^+$$

が成り立つ．実際，このとき $m \subsetneqq n$ だから n の元 x で m には含まれないものが存在するが，$n \subset m \cup \{m\}$ だから $x \in \{m\}$，すなわち $x = m$ となり，したがって $m^+ = m \cup \{m\} \subset n$，ゆえに $n = m^+$ が成り立つ．

また前節で示された補題1.2を用いてつぎの命題が成り立つことが示される．

(2.4)　$$m > n \Leftrightarrow m \geqq n^+.$$

実際，$m > n \Longrightarrow m \supsetneqq n$ だが，上述の補題1.2により $m \supsetneqq n \Longrightarrow m \ni n$，したがって，$m \supsetneqq n \Longrightarrow m \supset n^+$ となり，$m > n \Longrightarrow m \geqq n^+$ が成り立つ．この逆は $n < n^+$ となることから明らかである．

定理2.1　m, n を任意の自然数とすると，つぎの (i), (ii), (iii) の中の一つ，そしてただ一つが成り立つ．

(i)　$m < n$

(ii)　$m = n$

(iii)　$m > n$.

証明　(i), (ii), (iii) のどの二つも同時には成り立たないことは明らかだから，

それらの中のどれか一つが必ず成り立つことを示そう．そのため，自然数 n についての命題 $P(n)$ として，“任意の自然数 m に対して，$m<n$, $m=n$ または $m>n$ のいずれかが成り立つ”というものをとり，数学的帰納法(定理1.8)を用いてこれが任意の自然数 n について成り立つことを示そう．まず，任意の自然数 m について，$0=\phi\subset m$ だから $P(0)$ は成り立つ．$P(n)$ が成り立つと仮定して，$P(n^+)$ も成り立つことを示そう．m を任意の自然数とすると，仮定により $m<n$, $m=n$ または $m>n$ の中のいずれかが成り立つが，$m<n$ または $m=n$ ならば $m<n^+$ となる．一方，上の式(2.4)によって $m>n\Longrightarrow m\geqq n^+$ であるから，$P(n^+)$ も成り立つ．▌

S を ω の空ではない部分集合とし，S の元 n で，命題 $P(n)$ すなわち $\forall x(x\in S\Longrightarrow n\leqq x)$ が成り立つようなものがあれば，それはただ一つしかない．実際 S の元 m, n について $P(m), P(n)$ が成り立てば $P(m)$ により $m\leqq n$, また $P(n)$ により $n\leqq m$ だから，$m=n$ となる．このような元 n を S の**最小元**(minimum)と呼び $\min S$ と書く．また，S の元 m で，$\forall x(x\in S\Longrightarrow m\geqq x)$ が成り立つようなものが存在すれば，それは上と同様に一意的であり，S の**最大元**(maximum)と呼ばれ $\max S$ と書かれる．たとえば $S=\{1,3,5\}$ とすれば $\min S=1$, $\max S=5$ である．また $\min\omega=0$ であるが，$\max\omega$ は存在しない．任意の自然数 n に対して，$n<n^+$ となるからである．

定理 2.2　$S\subset\omega$, $S\neq\phi$ とすると $\min S$ が存在する．

証明　$S\ni 0$ ならば明らかに $\min S=0$ となる．$S\not\ni 0$ とし，ω の部分集合 S' を，$S'=\{n\in\omega\mid\forall x(x\in S\Longrightarrow n<x)\}$ によって定めよう．(S' は，S のどの元よりも小さな自然数全体の集合である．) 明らかに $S'\ni 0$, $S\cap S'=\phi$ である．もしも任意の S' の元 n について $n^+\in S'$ となれば，Peano の公理 P3) によって $S'=\omega$. したがって $S=\phi$ となりこれは仮定に反する．ゆえに S' の元 n で，$n^+\notin S'$ となるようなものが存在する．ゆえに，§1.1 (1.4) によって，命題 $\exists x(x\in S\wedge n^+\geqq x)$ が成り立つ．一方，$n\in S'$ だから，上の命題を満たす x に対して $n^+\geqq x>n$ となり，上述の式(2.3)によって $n^+=x$ となる．ゆえに $n^+\in S$ となるが，S の任意の元 y について $y>n$ だから，上述の(2.4)によって $y\geqq n^+$, すなわち $n^+=\min S$ となる．▌

さて，自然数の和，積を導入するために，対応，写像の概念を一般的な見地か

ら取り上げてみよう．

§2.2　順序対，直積，対応，写像

関数の概念は，中学校以来われわれにとって親しいものであった．たとえば，$f(x)=2x+1$ という関数によって‘数’ x に $2x+1$ が対応づけられる．この‘対応づけ’という概念は数学においてもっとも中心的なものである．任意の集合 a, b に対して，‘a から b への写像’を，“a の元 x に対して b の元 y を一定の方法で対応づけるもの”として‘定義’することも，多くの書物において行なわれている．このような写像の定義は直観的にはわかりよいが，集合論的な(少なくとも Zermelo, Fraenkel の集合論的な)見地からすれば，厳密さに欠ける．‘対応づけ’とは何であろうか．また‘一定の方法’とは何か．

集合 a から集合 b への写像 f というものを集合論的に定義するためには，写像 f の‘グラフ’を用いる．f のグラフとは，直観的にいえば，‘a と b の直積’ $a\times b$ の部分集合で $(x, f(x))$ $(x\in a)$ というペア(対)全体から成るものである．ところが，われわれの語彙の中には，‘a と b の直積’なるものはまだ含まれていなかった．まず，この‘$a\times b$’を定義することから始めなければならない．

集合 a, b が与えられたとき，それらの‘直積’ $a\times b$ の元としてわれわれが普通に考えているものは，a, b のそれぞれの元 x, y のペア (x, y) であり，そのようなペア (x, y), (x', y') $(x'\in a,\ y'\in b)$ が等しいとは，$x=x'$, $y=y'$ がともに成り立つことを意味するのであった．われわれがこれまでに得た素材を用いて，このようなペア (x, y) を構成することができないだろうか．まず思いつくのは公理 S 3)によって存在を主張された x, y の非順序対 $\{x, y\}$ である．ところが，われわれのペア (x, y) においては，x と y の書かれる順序を無視することはできないのに対し，$\{x, y\}$ においては，$\{x, y\}=\{y, x\}$ となってしまう．しかし，ここで諦めるのはまだ早いのであって，問題 1.5 (ii) でふれたように，

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{y\}, \{y, x\}\} \Leftrightarrow x = y$$

が成り立つのであった．ここで，さらにつぎの補題が成り立つ．

補題 2.1　集合 x, y, x', y' について，つぎのことが成り立つ．

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

証明　左の命題から右の命題が導かれることを示せば十分である．$\{\{x\},$

$\{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ が成り立つとし，まず $x \neq x'$ であると仮定しよう．すると $\{x\} \neq \{x'\}$ だから $\{x\} = \{x', y'\}$ となる．ところが，$\{x\} = \{x', y'\} \Longleftrightarrow x = x' = y'$，これは $x \neq x'$ という仮定に反する．したがって $x = x'$ となる．さてここで $y \neq y'$ とすると，$\{x, y\} \neq \{x', y'\}$ だから仮定により $\{x, y\} = \{x'\}$，したがって $x = y = x'$，さらに $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}\}$ となる．ゆえに $\{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x'\}\}$，$\{x'\} = \{x', y'\}$ となるので $x' = y'$，これから $y = y'$ となり，これは $y \neq y'$ という仮定に矛盾する．したがって $y = y'$ も成り立つ．▌

集合 x, y に対し，$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ を x, y の**順序対** (ordered pair) と呼び，(x, y) と表わす．

x, y がそれぞれ集合 a, b の元であるとき，$\{x\} \subset a$，$\{x, y\} \subset a \cup b$ だから，$\{x\}$，$\{x, y\}$ はともにべき集合 $\mathcal{P}(a \cup b)$ の元となる．したがって $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ となる．

集合 a, b に対して，それらの**直積** (direct product, cartesian product) $a \times b$ を，

$$a \times b = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \mid \exists x \exists y (x \in a \wedge y \in b \wedge u = (x, y))\}$$

によって定義する．

‘普通のことば’でいえば，$a \times b$ は a の元 x，b の元 y の順序対 (x, y) 全体から成る集合である．べき集合の公理 S 7)，合併集合の公理 S 4) および分出公理 S 6) によって $a \times b$ は存在し，外延性公理 S 1) によって $a \times b$ は a と b が与えられたとき確定する．

上の定義により，

$$a \times b \ni u \Longleftrightarrow \exists x \exists y (x \in a \wedge y \in b \wedge u = (x, y))$$

となるから，特に

$$\phi \times b = \phi, \qquad a \times \phi = \phi$$

が，任意の a, b に対して成り立つ．

問題 2.1　集合 a, b, c, d についてつぎのことが成り立つことを示せ．

(i)　$(a \cup b) \times c = (a \times c) \cup (b \times c)$

(ii)　$(a \cap b) \times c = (a \times c) \cap (b \times c)$

(iii)　$a \subset c,\ b \subset d \Longrightarrow a \times b \subset c \times d$. ——

さて，写像の定義を与えるまえに，より一般的な概念である‘対応’の定義を与えよう．

集合 a, b に対して，直積 $a\times b$ とその部分集合 f の順序対 $(a\times b, f)$ を **a から b への対応** (correspondence) と呼び，f を対応 $(a\times b, f)$ の**グラフ** (graph) という．(a, b の与えられているとき，$(a\times b, f)$ を略して単に‘対応 f’ということもある.) $x\in a$ のとき，$f(x)=\{y\in b\mid (x, y)\in f\}$ とおき，$f(x)$ を x の f による**像** (image) と呼ぶ．特に $f(x)=\{y\}$ $(y\in b)$ のとき，単に $f(x)=y$ とも書く．

例 2.1　ω から ω への対応 f として，$f=\{(m, n)\in\omega\times\omega\mid n=m^+\}$ をとることができる．ここで，$f(m)=m^+$ である．——

a から b への対応 $(a\times b, f)$ が与えられたとき，これを‘対応 $f: a\to b$’または‘対応 $a\xrightarrow{f}b$’とも表わす．対応 $f: a\to b$ が与えられたとき，$a'\subset a$ に対して，$f[a']=\{y\in b\mid\exists x(x\in a'\wedge(x, y)\in f)\}$ とおけば，$f[a']=\bigcup_{x\in a'}f(x)$ となる．(ただし，ここで，$\bigcup_{x\in a'}f(x)$ は正確には，$b'=\{z\in\mathcal{P}(b)\mid\exists x(x\in a'\wedge z=f(x))\}$ とおいたとき，$\bigcup b'$ のことである.) 実際 a' の任意の元 x に対して，$f(x)\subset f[a']$ となり，また $f[a']$ の任意の元 y に対して，$y\in f(x)$ となるような a' の元 x が存在する．$f[a']$ は，f による a' の**像** (image) と呼ばれる．($f[a']$ は $f(a')$ と書かれることもある.) 特に，$f[\phi]=\phi$ である (読者自ら確かめられたい)．また，$f[a]$ を単に f の**像** (image) または**値域**と呼び $\mathrm{Im}\,f$ とも表わす．いま，$\{x\in a\mid f(x)\neq\phi\}$ を f の**定義域** (domain of definition) と呼び，これを $\mathrm{Dom}\,f$ と書く．

問題 2.2　例 2.1 で与えられた対応 $f: \omega\to\omega$ について，$\mathrm{Dom}\,f$ および $\mathrm{Im}\,f$ を求めよ．——

対応 $f: a\to b$ は，$\mathrm{Dom}\,f=a$，しかも a の任意の元 x に対して $f(x)$ が b の元のシングルトンとなるとき，**a から b への写像** (mapping) と呼ばれる．例 2.1 で与えられた対応 $f: \omega\to\omega$ は ω から ω への写像である．また一般に a から b への写像 f, g について，

$$f\subset g \Leftrightarrow f=g$$

が成り立つ (読者自ら確かめられたい)．

例 2.2　集合 a に対して $\Delta_a=\{(x, y)\in a\times a\mid x=y\}$ を直積 $a\times a$ の**対角線集合** (diagonal set) と呼ぶ．$f=\Delta_a$ とおけば，$(a\times a, f)$ は a からそれ自身への写像であり，a の任意の元 x について $f(x)=x$ となる．この写像を a の**恒等写像** (identity mapping) と呼び，id_a または 1_a などと表わす．

例 2.3　直積 $a\times b$ から a への写像 f を，

$$f=\{((x,y),z)\in(a\times b)\times a\mid x=z\}$$

によって定義することができる．このとき $a\times b$ の元 (x,y) に対して，$f((x,y))=x$ となる．この f を $a\times b$ から a への**標準的射影** (canonical projection) と呼び，proj_a とも書く．同様にして，$a\times b$ から b への標準的射影 proj_b が定義される．——

写像 $f:a\to b$ について $f[a]=b$ のとき f は a から b への**全射**または a から b の**上への写像** (surjection, onto mapping) と呼ばれ，a の任意の元 x,y に対して $f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y$ が成り立つとき f は a から b への**単射** (injection, 1:1 mapping) と呼ばれる．f が a から b への全射でかつ単射のとき f は a から b への**全単射** (bijection, 1:1 onto mapping) と呼ばれる．a から b への全単射が存在するとき a と b とは**対等** (equivalent) であるといわれ $a\approx b$ と書かれる．

例 2.4 $a\times b$ から a への標準的射影は全射である．例 2.1 で与えられた写像 $f:\omega\to\omega$ ($f(m)=m^+$) は単射ではあるが全射ではない ($0\notin f[\omega]$)．——

a から b への対応 f が与えられたとき，b から a への対応 f^{-1} がつぎのように定義される．

$$f^{-1}=\{(y,x)\in b\times a\mid(x,y)\in f\}.$$

$(b\times a,f^{-1})$ (または略して f^{-1}) を $(a\times b,f)$ (または f) の**逆対応**と呼ぶ．たとえば，例 2.1 で与えられた写像 $f:\omega\to\omega$ について $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $\cdots$ であったが，$(m,n)\in f^{-1}\Leftrightarrow m=n^+$ であるから $f^{-1}(1)=0$, $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(3)=2$, $\cdots$ となる．この例では，f は写像であるが，f^{-1} は写像ではない．$f^{-1}(0)=\phi$ となり，$\mathrm{Dom}\,f^{-1}\subsetneqq\omega$ となるからである．

一般に a から b への対応 f が与えられたとき，明らかに $(f^{-1})^{-1}=f$ である．このことから，a から b への対応 f,g について，$f=g\Leftrightarrow f^{-1}=g^{-1}$ が成り立つことがわかる．

f を a から b への写像とするとき，f^{-1} は必ずしも写像とはならないことは上に見た通りであるが，もしも f が全単射ならば f^{-1} も b から a への写像となり，しかも全単射である．実際 b の任意の元 y について f が全射であることから $y\in\mathrm{Im}\,f$，ゆえに $y=f(x)$ となるような a の元 x が存在するが，f が単射であることからこのような x は一意的である (すなわち y によって確定する)．このとき明らかに $f^{-1}(y)=x$ となって，$\mathrm{Dom}\,f^{-1}=b$，しかも f^{-1} が写像であることが

わかる．f^{-1} が全単射であることは，読者自ら確かめられたい．

上のことから直ちに，$a \approx b \Leftrightarrow b \approx a$ が成り立つことがわかる．

f, g を a から b への対応とするとき，$f \cup g$, $f \cap g$ もそれぞれ a から b への対応となる．いま，特に a の部分集合 a' が与えられたとき，$g = a' \times b$ とおいて，$(a' \times b, f \cap g)$（または $f \cap g$）を $(a \times b, f)$（または f）の a' への**制限**(restriction)と呼び，$f \cap g$ を $f|_{a'}$ と表わす．定義により，

$$(x, y) \in f|_{a'} \Leftrightarrow x \in a' \wedge (x, y) \in f$$

となる．またこのとき，$(a \times b, f)$（または f）は $(a' \times b, f|_{a'})$（または $f|_{a'}$）の a への**拡張**(extension)であるという．一方，b' を b の部分集合とし，$h = a \times b'$ とおくとき，$(a \times b', f \cap h)$（または $f \cap h$）を‘$(a \times b, f)$（または f）によって引き起こされる a から b' への対応’と呼ぶ．明らかに，

$$(x, y) \in f \cap h \Leftrightarrow (x, y) \in f \wedge y \in b'$$

となる．

例2.1で与えられた $f: \omega \to \omega$ ($f(m) = m^+$) について，f によって引き起こされる ω から $\omega - \{0\}$ への写像を g とすれば，g は明らかに ω から $\omega - \{0\}$ への全単射である．したがって，自然数全体の集合 ω は，その真部分集合である $\omega - \{0\}$ と対等である！　実は後(定理4.10の系)で述べるように，或る集合 a がその真部分集合と対等になり得るという性質は，その集合 a が‘無限集合’であることを特徴づけるものである．

さて，a から b への対応 f は，いわば集合 a, b の間にかけられる橋ともいえよう．ここで，さらに集合 b から集合 c への橋となる対応 $g: b \to c$ が与えられたとき，f と g の‘合成’なる対応 $g \circ f: a \to c$ がつぎのように定義される．

$$g \circ f = \{(x, z) \in a \times c \mid f(x) \cap g^{-1}(z) \neq \phi\}.$$

定義により，

$$(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y (y \in b \wedge (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)$$

が成り立つ．また，$a' \subset a$ に対して $g \circ f[a'] = g[f[a']]$ となる．

例 2.5　$a = \{0, 1\}$ とし a からそれ自身への写像 f, g をそれぞれ $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 1$ によって与える．すると，$f \circ f = f \circ g = f$, $g \circ g = g \circ f = g$ となる(読者自ら確かめられたい)．——

容易にわかるように，$f: a \to b$, $g: b \to c$ がそれぞれ写像ならばそれらの合成

$g\circ f: a\to c$ も写像となり，$x\in a$ に対して $g\circ f(x)=g(f(x))$ となる．また，特に f, g がともに全射ならば $g\circ f$ も全射となり，f, g がともに単射ならば $g\circ f$ も単射となる．したがって，f, g がともに全単射ならば，$g\circ f$ も全単射となる．このことから，集合 a, b, c について，

$$a\approx b \wedge b\approx c \Longrightarrow a\approx c$$

が成り立つことがわかる．

問題 2.3 対応 $f: a\to b$，$g: b\to c$ が与えられたとき，

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

となることを示せ．

問題 2.4 a から b への対応 f, g について，

$$f\subset g \Longleftrightarrow \forall x(x\in a \Longrightarrow f(x)\subset g(x))$$

が成り立つことを示せ．——

上の問題 2.4 からも明らかなように，a から b への対応 f, g について，

$$f=g \Longleftrightarrow \forall x(x\in a \Longrightarrow f(x)=g(x))$$

が成り立つ．

さて，対応 $f: a\to b$，$g: b\to c$，$h: c\to d$ が与えられたとき，a から d への対応 $h\circ(g\circ f)$ と $(h\circ g)\circ f$ とは相等しい．定義に従って，このことを示そう．直積 $a\times d$ の元 (x, u) が $h\circ(g\circ f)$ に含まれるためには，c の元 z で，$(x, z)\in g\circ f\wedge(z, u)\in h$ となるようなものが存在することが必要十分である．

$$\begin{array}{ccccccc} a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{h} & d \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\ x & & y & & z & & u \end{array}$$

ところが，$(x, z)\in g\circ f$ となるためには，b の元 y で，$(x, y)\in f\wedge(y, z)\in g$ となるようなものが存在することが必要十分である．ゆえに，$(x, u)\in h\circ(g\circ f)$ とすると，$y\in b$，$z\in c$ で，$(x, y)\in f\wedge(y, z)\in g\wedge(z, u)\in h$ となるようなものが存在する．したがって，定義により，$(y, u)\in h\circ g$ となり，

$$\exists y(y\in b\wedge(x, y)\in f\wedge(y, u)\in h\circ g)$$

が成り立つから，再び定義により $(x, u)\in(h\circ g)\circ f$ となる．こうして，$h\circ(g\circ f)\subset(h\circ g)\circ f$ が示された．$h\circ(g\circ f)\supset(h\circ g)\circ f$ も同様に示される（読者自ら確かめられたい）．こうして，$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$，すなわち**対応に関する結合法則**が成

り立つことが示された.

さて，ここで‘1個’，‘2個’，‘3個’，一般に自然数 n が与えられたときに‘n 個’という概念を導入することができる．そのために，まず a を空集合とは異なる集合，x, y をその元とするとき，$a-\{x\}\approx a-\{y\}$ が成り立つことを注意しよう．実際 $a-\{x\}$ から $a-\{y\}$ への全単射 f を，つぎのように与えることができる．まず，$x=y$ のときは，f として $a-\{x\}$ の恒等写像をとればよい．$x\neq y$ のときには，y は $a-\{x\}$ の元となる．ここで，$f(y)=x$ とし，y とは異なる $a-\{x\}$ の元 z があれば $f(z)=z$ とおけば，明らかに f は $a-\{x\}$ から $a-\{y\}$ への全単射となる．このことから直ちにつぎの補題が導かれる．（証明は，読者の練習問題とする．）

補題 2.2 $\quad a\approx b,\quad a\ni x,\quad b\ni y \Longrightarrow a-\{x\}\approx b-\{y\}.$

定理 2.3 $\quad \omega\ni n,\quad n\supset a,\quad n\approx a \Longrightarrow n=a.$

証明 n についての数学的帰納法を用いる．n についての命題 $P(n)$ を，“$n\supset a\wedge n\approx a \Longrightarrow n=a$” としよう．まず $n=0$ のとき，$0\supset a \Longrightarrow a=\phi=0$ だから $P(0)$ は成り立つ．$P(n)$ が成り立つとして，$P(n^+)$ が成り立つことを示そう．$n^+\supset a$, $n^+\approx a$ とする．このとき，n^+ から a への全単射 f が存在し，$n\in n^+$ だから，$f(n)=x\in a$. ところが明らかに，$f[n^+-\{n\}]=a-\{x\}$ となり，$n=n^+-\{n\}$ だから $f|_n$ は n から $a-\{x\}$ への全単射となる．ゆえに，$n\approx a-\{x\}$ であるが，一方，$a\ni n$ となることが示される．実際，$a\subset n^+=n\cup\{n\}$ だから，もしも $n\notin a$ ならば $a\subset n$ となり，したがって $a-\{x\}\subsetneq n$ となる．ところが，一方，$n\approx a-\{x\}$ だから $P(n)$ により $n=a-\{x\}$ となり，これは $a-\{x\}\subsetneq n$ に矛盾する！ したがって $a\ni n$, また上の補題から明らかに $n=n^+-\{n\}\approx a-\{n\}$. ところが，$a-\{n\}\subset n$ だから，再び $P(n)$ により $n=a-\{n\}$. ゆえに，$n^+=a$. ▌

系 $\omega\ni m, n$ に対し，$m\approx n \Longleftrightarrow m=n$.

証明 定理 2.1 より，$m\leqq n$, または $m\geqq n$ のいずれかが成り立つ．$m\leqq n \Longleftrightarrow m\subset n$ だから，定理 2.3 により $m\approx n$ ならば $m=n$. $m\geqq n$ のときも同様である．$m=n \Longrightarrow m\approx n$ が成り立つことは自明である．▌

上の系により，もしも或る集合 a に対して，自然数 n で $a\approx n$ となるようなものがあれば，それは一意的であることがわかる．（すなわち，$a\approx n$, $a\approx m$ $(m, n\in\omega) \Longrightarrow n\approx m \Longrightarrow n=m$.）このとき，$a$ を**有限集合** (finite set) と呼び，$a\approx n$

となるような自然数 n を，a の**個数**，**位数**(order)，**基数**(cardinal number) または**濃度**(power) といい，$|a|=n$ と表わす．またこのとき，a は **n 個の元から成る集合**とも呼ばれる．特に $|\phi|=0$ である．また，どのような自然数 n に対しても，$a\approx n$ とはならないような集合 a があれば，この a を**無限集合**と呼ぶ．a が有限集合であることを，$|a|<\infty$ とも表わす．

定理 2.4　a を有限集合，$a\supset b$，$a\approx b$ とすれば，$a=b$ である．

証明　$|a|=n$，すなわち $a\approx n$ $(n\in\omega)$ としよう．a から n への全単射を f とすれば，明らかに $f[b]\subset n$ かつ $b\approx f[b]$ となるから，$a\approx b$ より $f[b]\approx a\approx n$．ゆえに，定理 2.3 より $f[b]=n=f[a]$．ゆえに，$a=b$．▌

系　集合 a について，a の真部分集合 b で，$a\approx b$ となるようなものが存在すれば，a は無限集合である．——

前に述べたように，写像 $f:\omega\to\omega$，$f(n)=n^+$ により，$\omega\approx f[\omega]=\omega-\{0\}$ が引き起こされるから，上の系によって自然数全体の集合 ω は無限集合であることがわかった！　さらに，補題 2.2 により，$\omega-\{0\}\approx\omega-\{0,1\}$，ゆえに，$\omega\approx\omega-\{0,1\}$．同様に，$\omega\approx\omega-\{0,1,2\}$，一般に，任意の $n\in\omega$ について，$\omega\approx\omega-n$ となる．

問題 2.5　a を有限集合，$b\subset a$ とすると，b も有限集合となることを証明せよ．
[ヒント]　a の濃度に関する数学的帰納法を用いるとよい．——

無限集合の性質については後にさらに詳しく調べることにし，また一般的な事柄に話を戻そう．

集合 a,b が与えられたとき，写像 $f:a\to b$ は直積 $a\times b$ の部分集合の中の特殊なものによって定まるが，a から b への写像のグラフ全体から成る集まりは，明らかに $\mathcal{P}(a\times b)$ の部分集合となる．この後者の集合を b^a または，後に述べる数のべきとの混同を避けるときには $\mathrm{Map}(a,b)$ と表わす．

問題 2.6　集合 a についてつぎの (i), (ii), (iii) が成り立つことを示せ．

(i)　$a^\phi=\{\phi\}$

(ii)　$a\neq\phi \Longrightarrow \phi^a=\phi$

(iii)　$a^a\neq\phi$．——

集合 a について，b をシングルトン $\{x\}$ とすると $a^b\approx a$ となる．実際 $a^b\ni f$ に，a の要素 $f(x)$ を対応させることによって，a^b から a への全単射が得られる．特

に $a^1 \approx a$ となる．

集合 a, b が与えられたとき，$(a \cup b)^{\{0,1\}}$ の部分集合

$$c = \{f \in (a \cup b)^{\{0,1\}} \mid f(0) \in a \wedge f(1) \in b\}$$

は直積 $a \times b$ と対等になる．実際 c の元 f に $a \times b$ の元 $(f(0), f(1))$ を対応させれば明らかに c から $a \times b$ への全単射が得られる．この全単射は‘自然’なものと考えられるので，c と $a \times b$ とは‘同一視’されることもある．

このように $a \times b$ が $(a \cup b)^{\{0,1\}}$ の部分集合と同一視されるが，この考えをさらに一般化することによって，より一般的な直積の概念が得られる．

まず，空ではない集合 I が与えられたとき，‘I によって添数づけられた集合’という概念を定義しよう．いま，I から集合 A への写像 f が与えられているとき，順序対 $(f, f[I])$ を I によって**添数づけられた集合**(indexed set)と呼び，I を $f[I]$ の**添数集合**，I の元 i を**添数**(index)というのである．$f(i)$ を a_i とも書き $(a_i \in A)$，$(f, f[I])$ を単に $\{a_i\}_{i \in I}$ のようにも書く．またこのとき $\bigcup f[I]$ を $\bigcup_{i \in I} a_i$ とも書く．特に $I=2=\{0,1\}$ ならば $\{a_i\}_{i \in 2}=\{a_0, a_1\}$ である．一般に，$I=n=\{0,1,\cdots,n-1\}$ $(n \in \omega-\{0\})$ のとき，$\{a_i\}_{i \in n}$ を $\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ とも書き，これを‘$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ から成る集合’と呼ぶ．

空集合とは異なる集合 I によって添数づけられた集合 $\{a_i\}_{i \in I}$ が与えられたとき，その**直積**とは，つぎのような集合 b である．

$$b = \left\{\lambda \in \left(\bigcup_{i \in I} a_i\right)^I \middle| \forall i (i \in I \Longrightarrow \lambda(i) \in a_i)\right\}.$$

この集合 b を $\prod_{i \in I} a_i$ と表わす．上に述べたように，特に $I=2$ のときには $\prod_{i \in 2} a_i$ は $a_0 \times a_1$ と同一視される．$I=n$ のとき，$\prod_{i \in I} a_i$ は $\prod_{i=0}^{n-1} a_i$ または $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_{n-1}$ のようにも表わされる．

一般に，λ を直積 $\prod_{i \in I} a_i$ の元とすれば，λ は $\lambda(i)$ $(i \in I)$ によって定まるので λ を $(\lambda(i))_{i \in I}$ あるいは単に $(\lambda(i))$ のようにも書く．特に $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_{n-1}$ の元は $(\lambda(0), \lambda(1), \cdots, \lambda(n-1))$ のように書かれる．たとえば $\omega \times \omega \times \omega$ の元 $(1, 2, 3)$ は ω^3 の元 λ で，$\lambda(0)=1$，$\lambda(1)=2$，$\lambda(2)=3$ によって与えられるものである．

問題 2.7　集合 a, b, c について

$$a \times b \times c \approx (a \times b) \times c \approx a \times (b \times c)$$

となることを確かめよ．——

直積の定義からも明らかなように，$a \neq \phi$, $b \neq \phi$ のとき $a \times b \neq \phi$ である．また，$n \in \omega$, $n > 0$ とすれば，$a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_{n'} \approx (a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n) \times a_{n'}$ だから，一般に $a_i \neq \phi$ $(i=0,1,\cdots,n)$ ならば $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n \neq \phi$ である．一般に空集合とは異なる集合 I によって添数づけられた集合 $\{a_i\}_{i \in I}$ で，I の任意の元 i に対して $a_i \neq \phi$ となるものが与えられたとき，$\prod_{i \in I} a_i$ は空集合と異なるだろうか．このことについては，後に(定理4.9)述べるが，この問に肯定的に答えるために考えられたものが，'選出公理' である．

さて，a を集合とするとき，a^ω の元 f，すなわち ω から a への写像(のグラフ)を a に属する**点列**ともいう．この概念は，後に有理数から実数を構成する際に用いられる．

a を任意の集合とするとき $\{0,1\}^a$ は 2^a とも書かれるが，$f \in 2^a$ に対して，$f^{-1}(1) = \alpha$ とおけば $\alpha \subset a$ で

$$x \in \alpha \iff x \in a \wedge f(x) = 1$$

となる．逆に a の任意の部分集合 α に対して，2^a の元 f を，

$$\begin{cases} f(x) = 0 \iff x \in a - \alpha \\ f(x) = 1 \iff x \in \alpha \end{cases}$$

によって定めることができ，明らかに $f^{-1}(1) = \alpha$ となる．a が固定されているとき，このような f を α の**特性関数**(characteristic function)と呼び χ_α と表わす．$\mathcal{P}(a)$ の元 α を 2^a の元 χ_α に対応させる写像は全単射であり，$2^a \approx \mathcal{P}(a)$ が成り立つ．

a^a の元は a の**変換**(transformation)と呼ばれ $\mathfrak{T}(a)$ とも書かれる．f, g を a^a の元とすると，それらの合成 $f \circ g$ も a^a の元であり，すでに述べたように，$f, g, h \in a^a$ とすると，$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ が成り立つ．$\mathfrak{T}(a)$ の元 f に対して，f^{-1} は必ずしも $\mathfrak{T}(a)$ には属さない．実際，このとき，$f^{-1} \in \mathfrak{T}(a)$ となることと，f が a から a への全単射となることとは同値である(読者はこのことを確かめられたい)．a からそれ自身への全単射は a の**置換**(substitution, permutation)と呼ばれ，a の置換全体の成す集合は $\mathfrak{S}(a)$ と表わされる．$\mathfrak{S}(a) = \{f \in a^a \mid f^{-1} \in a^a\}$ である．f, g を $\mathfrak{S}(a)$ の元とすれば $f \circ g, f^{-1}$ もそれぞれ $\mathfrak{S}(a)$ に属する．

問題 2.8　$a = \phi$ または a がシングルトンならば $\mathfrak{T}(a) = \mathfrak{S}(a)$ となること，またその逆も成り立つことを示せ．

例 2.6　$a=\{0,1\}$ のとき 2^a はつぎの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 から成る．

$$f_1(0)=0,\ f_1(1)=1;\quad f_2(0)=1,\ f_2(1)=0;$$
$$f_3(0)=0,\ f_3(1)=0;\quad f_4(0)=1,\ f_4(1)=1.$$

これらの合成はつぎの表に示される（f_i の行と f_j の列が交差する場所に，$f_i \circ f_j$ が記される）．

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

2^a の元の中で $\mathfrak{S}(a)$ に属するものは f_1, f_2 である．（これらのことを，読者は確かめられたい.）

§2.3　自然数の和，積

さて，§2.1の終りの部分で述べたように，自然数の和，積を定義しよう．たとえば自然数 n に‘2を加える’という操作を考えることは，自然数全体の集合 ω からそれ自身への写像 f で，$f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(2)=4$, … のようなものを考えることに等しいのであるが，‘…’の部分をより厳密に言わなければならない．‘…’は，“$n\in\omega$ に対して $f(n)=a$ とすれば $f(n^+)=a^+$” であると言い換えることができる．ところが，このような条件を満たす ω から ω への写像が果して確定するだろうかという問題が生じる．このような問題に対処するためにつぎの定理を用いる．

定理 2.5（帰納定理）　A を空ではない集合とし，$a\in A$ とする．さらに写像 $f: A\to A$ が与えられているとき，写像 $F: \omega\to A$ でつぎの条件を満たすものが一意的に存在する．

(i)　$F(0)=a$

(ii)　$n\in\omega$ について，$F(n^+)=f(F(n))$.

（§1.2でも述べたように，集合を表わすのに $a, b, \cdots, x, y, A, B, \cdots$ などの文字を使う．ここでは，$0, n, f, F, \omega, A$ などはすべて集合である.）

証明　まず対応 $F:\omega\to A$ で上の条件を満たすものが存在することを示そう．

$$S=\{x\in\mathcal{P}(\omega\times A)\,|\,x\ni(0,a)\wedge[x\ni(n,\alpha)\Longrightarrow x\ni(n^+,f(\alpha))]\}$$

とおけば，明らかに $S\ni\omega\times A$ だから $S\neq\phi$．したがって，集合 $F=\bigcap S$ が確定し，$F\in\mathcal{P}(\omega\times A)$ となる．ゆえに F は ω から A への対応のグラフとなり，明らかに $F\ni(0,a)$ および "$F\ni(n,\alpha)\Longrightarrow F\ni(n^+,f(\alpha))$" が成り立つ．ここで，$F$ が ω から A への写像であることが示されれば定理の証明は完了する．(実際，このときもしも写像 $F':\omega\to A$ で条件 (i), (ii) を満たすものがあれば $F'\in S$ となり，したがって $F=\bigcap S\subset F'$．ここで，F, F' はともに ω から A への写像だから $F=F'$ となり，F の一意性が示される.)　そのために，まず $\mathcal{P}(\omega\times A)$ の元 x_0 で，条件

$$x_0\ni(n,\alpha)\Longleftrightarrow(n,\alpha)=(0,a)\vee(n,\alpha)\in(\omega-\{0\})\times A$$

を満たすものは S に含まれることに注意しよう．(実際，自然数 n に対して $n^+=0$ となることはあり得ないことから，このことは直ちに確かめられる.)　したがって，$F\subset x_0$ となり，このことから明らかに $F(0)=a$ となる．ここで，自然数 n について $F(n)=\alpha$ ならば $F(n^+)=f(\alpha)$ となることを示そう．これができれば，数学的帰納法(定理1.8)によって，F は写像であり，定理の条件を満たすものであることがわかるのである．さて，$F(n^+)\ni f(\alpha)$ は F の定義から明らかである．$F(n^+)\ni\beta,\ \beta\neq f(\alpha)$ として矛盾を導けばよい．ここで，

$$y=F-\{(n^+,\beta)\}$$

とおこう．y は S の元となる．実際 $y\ni(0,a)$ は $0\neq n^+$ だから明らかであるし，"$y\ni(m,\gamma)\Longrightarrow(m^+,f(\gamma))\in y$" $(m\in\omega,\ \gamma\in A)$ はつぎのように示される．まず $m=n$ ならば，$F(n)=\alpha$ という条件によって $\gamma=\alpha$ となり，y の定義により $(n^+, f(\alpha))\in y$ が成り立つ．$m\neq n$ ならば $m^+\neq n^+$ (定理1.7)，また $(m,\gamma)\in F\Longrightarrow(m^+, f(\gamma))\in F-\{(n^+,\beta)\}$ だから，$y\in S$ となる．ゆえに $y\subsetneqq F$ だが F の定義によって $F\subset y$ だから矛盾である．▌

さて，$a\in\omega$，写像 $f:\omega\to\omega$ を $f(n)=n^+\ (n\in\omega)$ によって定まるものとすれば，定理2.5によってつぎの条件を満たす写像 $\alpha_a:\omega\to\omega$ が確定する．

$$\alpha_a(0)=a,\qquad \alpha_a(n^+)=\alpha_a(n)^+\quad(n\in\omega).$$

ここで，$\alpha_a(n)=a+n\ (n\in\omega)$ と書き，これを自然数 a, n の**和** (sum) というのである．また，写像 $\alpha_a:\omega\to\omega$ を上の f の代りに用いてまた定理2.5を使えば，つ

ぎの条件を満たす写像 $\mu_a:\omega\to\omega$ が確定する.

$$\mu_a(0)=0,\qquad \mu_a(n^+)=\alpha_a(\mu_a(n))\quad (n\in\omega).$$

たとえば $\mu_a(1)=a+0=a$, $\mu_a(2)=a+a$, $\mu_a(3)=a+(a+a)$, $\cdots$ となる. ここで $\mu_a(n)=an$ または $a\times n$ と書いて，これを自然数 a, n の**積**(product) という. ($a\times n$ はまた ω の元であり，この場合は a と n の直積とは異なる.) さらに，$\mu_a:\omega\to\omega$ を用いて，もう一度定理2.5を使えば，つぎの条件を満たす写像 $\pi_a:\omega\to\omega$ が確定する.

$$\pi_a(0)=1,\qquad \pi_a(n^+)=\mu_a(\pi_a(n))\quad (n\in\omega).$$

たとえば $\pi_a(1)=a$, $\pi_a(2)=aa$, $\pi_a(n^+)=a\pi_a(n)$ である. ここで $\pi_a(n)=a^n$ と書き，これを a の $\boldsymbol{n}$ **べき**または $\boldsymbol{n}$ **乗**(n-th power) と呼ぶ.

さて，こうして定義された和，積，べきはわれわれが日頃慣れ親しんでいるような諸性質を持つだろうか.

まず，$\alpha_0=1_\omega$, すなわち任意の $n\in\omega$ に対して $0+n=n$ となることを示そう. $0+0=0$ は，α_0 の定義から成り立つ. また $0+n=n$ ならば，$0+n^+=\alpha_0(n^+)=\alpha_0(n)^+=n^+$ だから，数学的帰納法によって $\alpha_0=1_\omega$ である！

つぎに，$a, b\in\omega$, $n\in\omega$ のとき，

$$(2.5)\qquad a>b \Longrightarrow n+a>n+b$$

となることが n に関する数学的帰納法によって示され，これから $\alpha_n:\omega\to\omega$ が単射であることがわかる(読者は(2.5)が示されることを確かめられたい).

$\alpha_a\circ\alpha_b=\alpha_{a+b}$ である. 実際 $\alpha_a\circ\alpha_b(0)=\alpha_a(b)=a+b=\alpha_{a+b}(0)$, また $\alpha_a\circ\alpha_b(n)=\alpha_{a+b}(n)$ ならば $\alpha_a\circ\alpha_b(n^+)=\alpha_a(\alpha_b(n^+))=(\alpha_a\circ\alpha_b(n))^+=\alpha_{a+b}(n)^+=\alpha_{a+b}(n^+)$ だから，数学的帰納法によって上のことが成り立つ.

これから，ω の任意の要素 a, b, c について

$$(2.6)\qquad (a+b)+c=a+(b+c)\qquad (\text{結合法則})$$

が成り立つことがわかる. 実際，$(a+b)+c=\alpha_{a+b}\circ\alpha_c(0)=(\alpha_a\circ\alpha_b)\circ\alpha_c(0)=\alpha_a\circ(\alpha_b\circ\alpha_c)(0)=\alpha_a\circ\alpha_{b+c}(0)=a+(b+c)$.

つぎに，$\alpha_1(n)=n^+$ $(n\in\omega)$ となることが n に関する数学的帰納法によって示され(読者自ら確かめられたい)，これを用いて，つぎの(2.7)が ω の任意の元 a, b について成り立つことが示される.

$$(2.7)\qquad a+b=b+a\qquad (\text{交換法則}).$$

実際，$b=0$ ならば $a+0=\alpha_a(0)=a=0+a$ で (2.7) は成り立ち，$b=n$ のときに $a+n=n+a$ となるならば，$a+n^+=(a+n)^+=\alpha_1(a+n)=1+(a+n)=1+(n+a)=(1+n)+a=n^++a$ となるから，(2.7) は成り立つ！

問題 2.9　ω の元 a,b,c,d についてつぎの (i)-(x) が成り立つことを示せ．

(i)　$\mu_1=1_\omega$

(ii)　$\mu_0(n)=0 \quad (n\in\omega)$

(iii)　$a(b+c)=ab+ac, \quad (a+b)c=ac+bc$　(分配法則)

(iv)　$ab=ba$　(交換法則)

(v)　$(ab)c=a(bc)$　(結合法則)

(vi)　$a\geqq b,\ c\geqq d \Longrightarrow a+c\geqq b+d$

(vii)　$a>b,\ n\geqq 1 \Longrightarrow an>bn$

(viii)　$n\geqq 1$ のとき μ_n は ω からそれ自身への単射である

(ix)　$a^na^m=a^{n+m}$

(x)　$(a^n)^m=a^{nm} \quad (m,n\in\omega)$.

問題 2.10　a,b を有限集合，$|a|=m$，$|b|=n$ $(m,n\in\omega)$ とすると，$a\cup b$ も有限集合で，

$$|a\cup b|\leqq m+n$$

となることを示せ．またこのとき，$|a\times b|=mn$，$|a^b|=m^n$ となることを示せ．

定理 2.6　a,b を ω の元とするとき，

$$a\geqq b \Leftrightarrow \exists c(c\in\omega\wedge a=b+c)$$

が成り立つ．

証明　$b,c\in\omega$ とすると，$b\geqq b$，$c\geqq 0$ だから問題 2.9 (vi) により $b+c\geqq b+0=b$ となり，上の $\Longleftarrow$ が成り立つ．

逆も成り立つことを示すために，まず，$n\in\omega$ に関する命題 $P(n)$ として，“$n\geqq 1 \Longrightarrow \exists m(m\in\omega\wedge n=m^+)$” をとるとき，$\omega$ の任意の元 n について $P(n)$ が成り立つことを示そう．$n=0$ とすると，“$0\geqq 1$” が成り立たないので，$P(0)$ は成り立つ (§1.1 参照)．また “$P(n)\Longrightarrow P(n^+)$” が成り立つことは，$n^+=n+1\geqq 1$，さらに m として n をとれば $n^+=m^+$ となることから明らかである．さて，$a\geqq b$ と仮定し，

$$S=\{n\in\omega\,|\,b+n\geqq a\}$$

とおこう．$b+a\geqq a$ だから $S\ni a$，ゆえに $S\neq\phi$．定理2.2によって，$\min S$ が存在する．$\min S=c$ とおこう．すると，$b+c\geqq a$ となるが，ここで $c=0$ ならば，$b\geqq a$ かつ $a\geqq b$ だから $a=b=b+0$ となって，定理は成り立つ．また $c\neq 0$ ならば $c>0$，したがって§2.1,(2.4)により $c\geqq 1$ だから，上に示したことにより，$c=d^+$ となるような $d\in\omega$ が存在し，$d<d^+$ だから $d\notin S$ となる．したがって，$b+d<a\leqq b+c=b+d^+=(b+d)^+$，ゆえに§2.1,(2.3)によって $a=b+d^+$．▌

上の定理および定理2.1により，a,b を ω の任意の元とすると，

$$a=b+c\quad(c\in\omega-\{0\}),\qquad a=b,\qquad b=a+c\quad(c\in\omega-\{0\})$$

のいずれかの場合が，しかもこの中の一つの場合のみが起こる．

a,b を ω の元とするとき，ω の元 c で $a=bc$ となるようなものがあるとき，a は b の**倍数**(multiple)または b は a の**約数**(divisor, factor)であるといい，$b|a$ と表わす．0は任意の自然数の倍数である．

問題2.11　$a,b\in\omega-\{0\}$ のとき，

$$a|b\Longrightarrow a\leqq b$$

が成り立つことを示せ．——

$a,b\in\omega-\{0\}$ に対して，$a\leqq b\Longrightarrow a|b$ は必ずしも成り立たない．たとえば，$a<a^+$ であるが，$1<a$ とすれば，$a2=a+a>a+1=a^+$ となり，一方，$n\in\omega$，$n\neq 0,1,2$ とすると，$n\not\subset 2=\{0,1\}$ だから $n>2$ となり，したがって $an>a2>a^+$ となる．$a0=0<a^+$，$a1=a<a^+$ だから，ω のどの元 n に対しても $an=a^+$ となることはない！　$a|b$ の否定を $a\nmid b$ と表わす．上のことから，$1<a\Longrightarrow a\nmid a^+$ が成り立つ．特に，$2\nmid 3$ である．2,3のように，$\omega-\{0\}$ の元 p で，1とは異なり，その約数が1と p 自身以外にはないものを**素数**(prime number)と呼ぶ．

直積 $\omega\times\omega$ の元 (a,b) に $a+b$ または ab を対応させることによって，それぞれ写像 $\alpha:\omega\times\omega\to\omega$，$\mu:\omega\times\omega\to\omega$ が定まる．このとき α を ω の**加法**(addition)と呼び，＋とも書く．μ を ω の**乗法**(multiplication)と呼び，×とも書く．

§2.4　代数系，半群，群

A を空ではない集合，O を $A^{A\times A}$ の部分集合とするとき，順序対 $(A,O)=\mathfrak{A}$ を**代数系**(algebraic system)と呼び，A をその**台集合**(support)，O の元をその**算法**(operation)，O をその**算法族**という．特に $O=\{\alpha\}$ のとき，$(A,\{\alpha\})$ を単

に (A,α) とも書き，これを A を台集合とする α 系 (α-system) とも呼ぶ．

$+,\times$ を自然数全体の集合 ω の加法，乗法とするとき，$(\omega,\{+,\times\})$ は代数系であり，ω をこの代数系の台集合とみなすとき，ω を $\bar{N}$ とも表わす．また $\bar{N}-\{0\}$ を N とも表わす．代数系 $(\omega,+)$, $(\omega,\times)$ を，それぞれ $\bar{N}^{+}$, $\bar{N}^{\times}$ とも表わすことにする．

代数系 $\mathfrak{A}=(A,O)$，その算法 α が与えられたとき，A の元 x,y について $\alpha(x,y)$ を $x\alpha y$ とも書く．A の任意の元 x,y について

$$x\alpha y=y\alpha x$$

が成り立つとき，'α について**交換法則** (commutative law) が成り立つ'，または $\mathfrak{A}$（あるいは A）は α に関して**可換** (commutative) であるという．特に $O=\{\alpha\}$ ならば，$\mathfrak{A}$（または A）は**可換 α 系** (commutative α-system) と呼ばれる．

一方，上で，A の任意の元 x,y,z，O の元 α について

$$(x\alpha y)\alpha z=x\alpha(y\alpha z)$$

が成り立つとき，'α について**結合法則** (associative law) が成り立つ' といい，$\mathfrak{A}$（あるいは A）は α に関して**結合的** (associative) であるという．特に α 系 $\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ $(A\neq\phi)$ が α に関して結合的ならば，$\mathfrak{A}$（または A）を**半群** (semi-group) と呼ぶ．$\bar{N}^{+}$, $\bar{N}^{\times}$ はともに可換半群である．

$a\neq\phi$，$A=\mathfrak{T}(a)=a^{a}$，さらに写像 $\alpha: A\times A\to A$ を，$A\times A\ni(f,g)$ に対して，$\alpha(f,g)=f\circ g$（a から a への写像 f,g の合成）とおいて定めるとき，(A,α) は半群となり，a の**全変換半群** (total semi-group of transformations) と呼ばれる．（単に $\mathfrak{T}(a)$ を a の全変換半群と呼ぶこともある．）半群 $\mathfrak{T}(a)$ は必ずしも可換ではない．たとえば $a=\{0,1\}$ とすると，§2.2 例2.6 からわかるように，$\mathfrak{T}(a)$ は非可換である．

問題 2.12　$a(\neq\phi)$ の全変換半群が可換であるためには，a がシングルトンであることが必要十分であることを示せ．——

α 系 (A,α) において，算法 α はいわゆる '2項算法' と呼ばれるものである．すなわち，α は A の元 a,b の順序対 (a,b) に，A の元 $a\alpha b$ を対応させる写像である．これに対して，'連続する自然数の和' とか，'$1,2,\cdots,n$ の積' など，これも '常識的' なものとされている概念は，集合論的にはどのようにして基礎づけられるだろうか．この問題を考えるために，まず，つぎのことに注意しよう．α 系

(A, α) の台集合 $A(\neq\phi)$ の元 $a_0, \cdots, a_n$ が与えられたとき，$(a_0, \cdots, a_n) \in A^{n^+}$ となる．($n^+=\{0, \cdots, n\}$ である.) ここで，$\tilde{A}=\bigcup_{n\in\omega} A^{n^+}$ とおこう．$A^1 \subset \tilde{A}$ だが，A^1 の元 f は $\{0\}$ から A への写像であり，それは $f(0) \in A$ によって決定される．ここで，$f(0)$ と f とを同一視することによって，A^1 と A は同一視される．さて，$\tilde{A}$ から A への写像 F で，つぎの条件(i), (ii) を満たすものが一意的に存在することを示そう．

(i)　$F|_A = 1_A$

(ii)　$F(a_0, \cdots, a_n, a_{n^+}) = F(a_0, \cdots, a_n)\alpha a_{n^+}$　$(n \in \omega,\ a_0, \cdots, a_{n^+} \in A)$.

実際，$\mathcal{P}(\tilde{A}\times A)$ の部分集合 S を，$\tilde{A}$ から A への対応 x でつぎの条件(i), (ii) を満たすもの全体から成るものとしよう．

(i)′　A の任意の元 a に対して，$(a, a) \in x$

(ii)′　$A^{n^+}\times A$ の元 $((a_0, \cdots, a_n), a)$ が x に属せば，A の任意の元 b に対して，$((a_0, \cdots, a_n, b), a\alpha b)$ は x に属する．

明らかに $S \ni \tilde{A}\times A$ だから，$S\neq\phi$. ここで，$F=\bigcap S$ とおけば，帰納定理(定理2.5)の証明と全く同様の論法によって，F は $\tilde{A}$ から A への写像となり，条件(i), (ii) を満たすことが示される．F の一意性も，帰納定理の場合と同様に示される(読者自ら確かめられたい)．$F(a_0, \cdots, a_n)$ を $\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i$ と書くことにする．また $m, n \in \omega$ のとき，$\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_{m+i}$ を $\prod_{i=m}^{m+n}{}^{\alpha} a_i$ とも書く．

特に $A=\bar{N}$, α を $\bar{N}$ の加法とするとき，$\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i$ を $\sum_{i=0}^{n} a_i$ または $a_0+\cdots+a_n$ と書き，μ を $\bar{N}$ の乗法とするとき $\prod_{i=0}^{n}{}^{\mu} a_i$ を単に $\prod_{i=0}^{n} a_i$ または $a_0\cdots a_n$ と書く．

定理 2.7　$m, n \in \omega$, $m<n$ とし，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を半群 (A, α) の台集合の元とすると，つぎのことが成り立つ．

$$(*)\qquad \prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i = \left(\prod_{i=0}^{m}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha\left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i\right).$$

(定理2.6により，$n=m+k$, $k \in \omega-\{0\}$ だから上の式は意味を持つ.)

証明　定理を証明するためには，$n \in \omega$ についての命題 $P(n)$ で，“n よりも小さい任意の自然数 m と，A の元 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ について(＊)が成り立つ”というものが，任意の $n \in \omega$ について成り立つことを示せばよい．$n=0$ とすると，任意の自然数 m に対して $0\leqq m$ となり，$m<n$ となることはあり得ないので，$P(0)$ は成り立つ．$P(n)$ が成り立つことを仮定して，$P(n^+)$ も成り立つことを示そう．

(そうすれば，数学的帰納法によって，定理の証明が完了する.) 定義により，

$$(\#)\qquad \prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_i = \left(\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha a_{n^+}$$

となる．一方，$m<n^+ \Leftrightarrow m\leqq n$ が成り立つから，$m=n$ または $m<n$ である．$m=n$ とすると，$\prod_{i=n+1}^{n^+}{}^{\alpha} a_i=a_{n^+}$ であるから，上式(♯)より(＊)が成り立つ．$m<n$ の場合には，$P(n)$ が成り立つという仮定により，

$$\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i = \left(\prod_{i=0}^{m}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha\left(\prod_{i=m+1}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)$$

となるから，上式(♯)および，α について結合法則が成り立つという仮定により，

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_i &= \left(\left(\prod_{i=0}^{m}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha\left(\prod_{i=m+1}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)\right)\alpha a_{n^+}\\ &= \left(\prod_{i=0}^{m}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha\left(\left(\prod_{i=m+1}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha a_{n^+}\right)\\ &= \left(\prod_{i=0}^{m}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha\left(\prod_{i=m+1}^{n^+}{}^{\alpha} a_i\right)\end{aligned}$$

となるから，(＊)が成り立つ．▌

例 2.7 半群とは異なる α 系の例をあげよう．台集合としては ω をとり，算法 α は，$\alpha(m,n)=m^n$ $(m,n\in\omega)$ によって定められるものをとる．(ω,α) は α 系となるが，

$$(2\alpha 1)\alpha 2 = (2^1)^2 = 2^2 = 4,$$
$$2\alpha(1\alpha 2) = 2\alpha 1^2 = 2\alpha 1 = 2^1 = 2$$

からわかるように，半群にはならない．

定理 2.8 (A,α) を可換半群，$n\in\omega$，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を A の元とし，$\sigma\in\mathfrak{S}(n^+)$ $(=\mathfrak{S}(\{0,1,\cdots,n\}))$ とすると，

$$(**)\qquad \prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i = \prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_{\sigma(i)}$$

が成り立つ．

証明 可換半群 (A,α) が与えられたとき，上の定理を自然数 n についての命題 $P(n)$ とみなすことができる．$n=0$ ならば，$\mathfrak{S}(0^+)=\mathfrak{S}(1)=\{1_1\}$ だから，$\sigma(0)=0$ となり，$P(0)$ が成り立つことは自明である．また，$n=1$ のときも，α について交換法則が成り立つから，$P(1)$ は明らかに成り立つ．したがって，$n\geqq 1$ と

し, $P(n)$ が成り立つことを仮定し, $P(n^+)$ が成り立つことを示そう．$\sigma \in \mathfrak{S}((n^+)^+)=\mathfrak{S}(n+2)$ とする．まず，$\sigma(n^+)=n^+$ ならば，任意の $m \in n^+$ に対して $\sigma(m) \in n^+$ となるから，帰納法の仮定により

$$\prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_{\sigma(i)} = \left(\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_{\sigma(i)}\right)\alpha a_{n^+}$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha a_{n^+}$$
$$= \prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_i$$

となって，$(**)$ は成り立つ．つぎに，$\sigma(n^+) \neq n^+$ ならば，$\sigma(n^+)=k<n^+$，また，$m \in n^+$ で $\sigma(m)=n^+$ となるものが確定する．さらに，このとき，

$$\sigma[\{0,1,\cdots,n\}] = \sigma[n^+] = n^+ \cup \{n^+\} - \{k\} \ni n^+$$

となる．ゆえに，$\sigma[n^+]$ の適当な置換 τ をとれば，$\tau(\sigma(n))=n^+$ のようにできる．したがって，再び $P(n)$ が成り立つこと，および α について結合法則および交換法則が成り立つという仮定を用いれば，

$$\prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_{\sigma(i)} = \left(\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_{\sigma(i)}\right)\alpha a_k$$
$$= \left(\left(\prod_{i=0}^{n'}{}^{\alpha} a_{\tau\circ\sigma(i)}\right)\alpha a_{n^+}\right)\alpha a_k \qquad ((n')^+=n)$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{n'}{}^{\alpha} a_{\tau\circ\sigma(i)}\right)\alpha (a_{n^+}\alpha a_k)$$
$$= \left(\left(\prod_{i=0}^{n'}{}^{\alpha} a_{\tau\circ\sigma(i)}\right)\alpha a_k\right)\alpha a_{n^+}$$
$$(\{\tau\circ\sigma(0),\cdots,\tau\circ\sigma(n'),k\} = \{0,\cdots,n\})$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i\right)\alpha a_{n^+}$$
$$= \prod_{i=0}^{n^+}{}^{\alpha} a_i$$

となって，$P(n^+)$ が成り立つことが示された．▌

上の定理により，可換半群 (A,α) においては，A の元 $a_0,\cdots,a_n$ の‘積’$\prod_{i=0}^{n}{}^{\alpha} a_i$ は，‘積の順序’によらないで定まることが示された．B を A の有限部分集合で空集合とは異なるものとするとき，$|B|=n\ (>0)$ とすれば，$B \approx n = \{0,1,\cdots,n'\}$

$((n')^+=n)$ となるから，$B=\{a_0,\cdots,a_{n'}\}$ のようにおくことができる．ここで，(A,α) が可換半群であれば，‘積’ $\prod_{i=0}^{n'}{}^\alpha a_i$ は，集合 B によって定まる．こうして定まる A の元 $\prod_{i=0}^{n'}{}^\alpha a_i$ を，‘B の元の (α に関する) 積’ と呼び，単に $\prod_{a\in B}^\alpha a$ とも表わすことにする．——

代数系 $\mathfrak{A}=(A,O)$, $\mathfrak{A}'=(A',O')$ は，$O\approx O'$ のとき**同類**であるという．$\bar{N}^+$ と $\bar{N}^\times$ は同類だが，$\bar{N}^+$ と $(\bar{N},\{+,\times\})$ は同類ではない．$\mathfrak{A}=(A,O)$, $\mathfrak{A}'=(A',O')$ を同類な代数系，$\varphi:O\to O'$ を全単射とし，$\alpha\in O$ に対して $\varphi(\alpha)$ を α' と書こう．(普通，このような場合全単射 φ としては $\mathfrak{A},\mathfrak{A}'$ の性質から自明な仕方で選ばれるものがとられ，φ を特記せずに α と α' を同一視することが多い.) このとき，写像 $f:A\to A'$ は，

$$f(x\alpha y)=f(x)\alpha' f(y)$$

が A の任意の元 x,y および O の任意の元 α について成り立つとき，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}'$ (または A から A') への (φ に関する) **準同型写像** (homomorphism) と呼ばれ，特に f が単射ならば，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}'$ (または A から A') への (φ に関する) **同型写像** (isomorphism) と呼ばれる．さらに，f が全単射ならば，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}'$ (または A と A') は (φ に関して) f を通して**同型** (isomorphic) であるといわれ，$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}'$ (または $A\cong A'$) と書かれる．

ω の恒等写像 1_ω は，$(\omega,+)=\bar{N}^+$ から $(\omega,\times)=\bar{N}^\times$ への同型写像にはならない．実際，$1_\omega(0+1)=0+1=1$ だが，$1_\omega(0)\times 1_\omega(1)=0\times 1=0$ となるから，$1_\omega(0+1)\neq 1_\omega(0)\times 1_\omega(1)$ である！

$\bar{N}\ni m$ に対して，$m\bar{N}=\{x\in\bar{N}\mid\exists y(y\in\bar{N}\wedge x=my)\}$ とおこう．すると，$\bar{N}\ni x,y$ に対して，$mx+my=m(x+y)$ となることからわかるように，写像 $\alpha':m\bar{N}\times m\bar{N}\to m\bar{N}$ を，$\alpha'(x,y)=x+y$ $(x,y\in m\bar{N})$ によって定め，α' をまた $+$ と書けば，$(m\bar{N},+)$ は再び可換半群となる．写像 $f:\bar{N}\to m\bar{N}$ を $f(x)=mx$ $(\bar{N}\ni x)$ によって定めれば，この写像 f は $(\bar{N},+)$ から $(m\bar{N},+)$ への準同型写像となり，特に $m\geqq 1$ ならば f を通して $(\bar{N},+)$ と $(m\bar{N},+)$ は同型になる！ (読者自ら確かめられたい.)

(A,O) を代数系，B を A の部分集合としよう．α を O の元とするとき，$\alpha[B\times B]\subset B$ となれば，B は α **について閉じている**という．いま，B が O の任意の元について閉じているものとし，O の元 α に対してその $B\times B$ への制限を

α' と書こう．ここで $O'=\{\beta\in B^{B\times B}\mid\exists\alpha(\alpha\in O\wedge\beta=\alpha')\}$，すなわち‘$O$ の元の $B\times B$ への制限全体の集合’とすれば，(B,O') はまた代数系となる．ここで，もしも写像 $\varphi:O\to O'$ で $\varphi(\alpha)=\alpha'$ によって与えられるものが全単射ならば，B から A への**包含写像** ι，すなわち $B\ni x$ に対して $\iota(x)=x$ とおくことによって定められる写像は，(B,O') から (A,O) への同型写像となる．このとき (B,O')（または B）を (A,O)（または A）の**部分代数系** (algebraic subsystem) と呼ぶ．

上の例で，$(m\bar{\boldsymbol{N}},+)$ は $(\bar{\boldsymbol{N}},+)$ の部分代数系である $(m\in\bar{\boldsymbol{N}})$．

$\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ を半群とする．A の元 e で，

$$e\alpha x=x\alpha e=x$$

が A の任意の元 x に対して成り立つようなものがあれば，e を $\mathfrak{A}$（または A）の**単位元** (unity) と呼ぶ．0 は $\bar{\boldsymbol{N}}^+$ の単位元，1 は $\bar{\boldsymbol{N}}^\times$ の単位元となる．ω の加法 $+$ を $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ へ制限したものをまた $+$ と書けば，$(\boldsymbol{N},+)$ は $(\bar{\boldsymbol{N}},+)$ の部分半群となる．$(\boldsymbol{N},+)$ は $\boldsymbol{N}^+$ とも書かれる．（同様に，ω の乗法 $\times$ を $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ へ制限したものをまた $\times$ と書けば，$(\boldsymbol{N},\times)$ は $(\bar{\boldsymbol{N}},\times)$ の部分半群となり，$\boldsymbol{N}^\times$ とも書かれる.）$\boldsymbol{N}^+$ は単位元を持たない！

半群 $\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ の台集合 A が単位元 e を含めば，それは一意的である．実際 e' を A の元で $\mathfrak{A}$ の単位元となるようなものとすれば，まず e が単位元であることから，$e\alpha e'=e'$ となるが，つぎに e' も単位元であることから $e\alpha e'=e$ となり，$e'=e$ が成り立つ．

半群 $\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ の台集合が単位元を含むとき，$\mathfrak{A}$（または A）は**単位的** (unitary) であるという．単位的半群 $\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ と A の元 x が与えられたとき，

(2.8)　$$x\alpha y=y\alpha x=e \qquad (e\text{ は }\mathfrak{A}\text{ の単位元})$$

を満たすような A の元 y が存在すれば x は**正則** (regular) であるという．x が正則元であるとき，上の (2.8) を満たすような A の元 y は x によって一意的に定まる．実際，$z\in A$ に対しても $x\alpha z=z\alpha x=e$ となれば，α について結合法則が成り立つから

$$y=y\alpha e=y\alpha(x\alpha z)=(y\alpha x)\alpha z=e\alpha z=z.$$

ゆえに，$y=z$ となる！　このような A の元 y を x の**逆元** (inverse) と呼び，x^{-1} とも表わす．このとき，x^{-1} も正則元であり，明らかに $x=(x^{-1})^{-1}$ となる．A の正則元の全体を $A_\alpha{}^*$ または単に A^* と書く．すなわち，

$$A^* = \{x \in A \mid \exists y(y \in A \wedge y\alpha x = x\alpha y = e)\}.$$

$A^* \ni e$ だから $A^* \neq \phi$. また $x, y \in A^*$ ならば $(x\alpha y)^{-1} = y^{-1}\alpha x^{-1}$ だから A^* は α について閉じており，A の部分半群となる．

空集合とは異なる集合 a の全変換半群 $\mathfrak{T}(a)$ は 1_a を単位元として持つ．$\mathfrak{T}(a)$ の正則元は，a の置換に他ならない．したがって，$\mathfrak{T}(a)^* = \mathfrak{S}(a)$ となる．

単位的半群 $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ は，$A = A^*$ のとき**群** (group) と呼ばれる．このとき，台集合 A を，(α を算法とする) 群と呼ぶこともある．$\mathfrak{S}(a)$ は，写像の合成を算法とする群となり，a の**全置換群** (または**対称群**) (total group of permutations, symmetric group) と呼ばれる．

群 A の部分代数系 B がまた群となるとき，B を A の**部分群** (subgroup) と呼ぶ．全置換群 $\mathfrak{S}(a)$ の部分群を a の**置換群** (permutation group) と呼ぶ．(半群 A の部分代数系 B はまた半群となる．全変換半群 $\mathfrak{T}(a)$ の部分半群を a の**変換半群** (semi-group of transformations) と呼ぶ.) 特に $n = \{0, 1, 2, \cdots, n'\}$ $((n')^+ = n)$ をとるとき，$\mathfrak{S}(n)$ は n 次**対称群** (symmetric group of degree n) と呼ばれ，$\mathfrak{S}_n$ と書かれる．

A, B を集合とし，写像 $f: A \times B \to B$ が与えられているとする．このとき A は f を通して B に**作用する** (operate) という．$A \times B$ の元 (x, y) に対して，$f(x, y)$ を $x_f(y)$ あるいは単に $x(y)$ とも書く．特に A が半群 $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ の台集合であり，A の任意の元 x, x' および B の任意の元 y に対して，

$$(x\alpha x')_f(y) = x_f(x'_f(y))$$

が成り立つとき，半群 $\mathfrak{A}$ (または A) は B に**左から作用する**といい，他方

$$(x\alpha x')_f(y) = x'_f(x_f(y))$$

が成り立つとき，半群 $\mathfrak{A}$ (または A) は B に**右から作用する**という．$\mathfrak{A}$ が B に作用しているとき，A の元 x に対して，

$$\tau_x(y) = x_f(y) \qquad (y \in B)$$

とおくことによって，$\mathfrak{T}(B)$ の元 τ_x が得られる．特に $\mathfrak{A}$ が B に左から作用しているとき，A の元 x に $\mathfrak{T}(B)$ の元 τ_x を対応させることによって得られる写像 $\rho: A \to \mathfrak{T}(B)$ は明らかに半群の準同型写像となる．

群 $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ が半群として B に左 (あるいは右) から f を通して作用し，さらに B の任意の元 x に対して，

$$e(x) = x \qquad (e \text{ は } A \text{ の単位元})$$

が成り立つとき，$\mathfrak{A}$(または A)は群として B に左(あるいは右)から作用するという．A が B に群として f を通して左から作用するとき順序対 (A, B) (または略して B) を (f に関する) A **空間** (A-space) と呼ぶ．

問題 2.13　A を群，B を A 空間とし，A の元 g に対して，$\tau_g \in \mathfrak{T}(B)$ を $\tau_g(x) = g(x)$ $(x \in B)$ によって定めると，$\tau_g \in \mathfrak{S}(B)$ となり，写像 $\rho: A \to \mathfrak{S}(B)$ で，$\rho(g) = \tau_g$ $(g \in A)$ によって定められるものは群の準同型写像となることを示せ．——

自然数の加法群 $\bar{\boldsymbol{N}}^+ = (\bar{\boldsymbol{N}}, +)$ をとると，$(\bar{\boldsymbol{N}}^+)^* = \{0\}$ となり，$\bar{\boldsymbol{N}}^+$ は群にはならない．'整数全体の集合' をとると，それが加法について群を成すということは，いわば'常識'とされている．ところが，'整数全体の集合'とは何だろうか．それは，どのようにして構成されるだろうか．'常識的'には，"整数全体の集合とは，$a, b \in \bar{\boldsymbol{N}}$ とするとき，方程式

$$a + x = b$$

の解 x 全体の集合である" というような言い方がされる．しかしここで，a, b の代わりに $a+c, b+c$ をとっても方程式の解としては同じ x が得られる．したがって，上の方程式の解 x を，安易に順序対 (a, b) と同一視するようなことは許されない．こうした事柄は，次節で述べる'関係'の概念，特に'同値関係'と'同値類'の概念を用いることによって，より明確にされる．

第3章　自然数と整数，有理数

——関係，同値関係——

§3.1　関係，同値関係，整数

a を集合とする．a からそれ自身への対応 $(a\times a, f)$ または単にそのグラフ f を，a の元の間の**関係** (relation) ともいい，$(x, y)\in f$，すなわち $y\in f(x)$ のときに，'a の元 x, y は f によって関係づけられる' といって，$x \underset{f}{\sim} y$ (または単に $x\sim y$ など) と書く．このとき f を関係 $\underset{f}{\sim}$ (または $\sim$) の**グラフ**ともいう．また，ここで，f の逆対応 f^{-1} を f の**逆関係** (inverse relation) ともいい，f, g を a の元の間の関係とするとき，対応の合成 $f\circ g$ を**関係の合成** (composition of relations) ともいう．$x, y\in a$ とし，f を a の元の間の関係とするとき，

$$x \underset{f}{\sim} y \Leftrightarrow y \underset{f^{-1}}{\sim} x$$

が成り立ち，$x, y, z\in a$，さらに f, g を a の元の間の関係とするとき，

$$x \underset{f}{\sim} y \wedge y \underset{g}{\sim} z \Longrightarrow x \underset{g\circ f}{\sim} z$$

が成り立つ．

集合 a の元の間の関係 $\sim$ として，$a\times a$ の対角線集合 Δ_a をグラフとするものをとれば，$x, y\in a$ に対し，

$$x\sim y \Leftrightarrow x=y.$$

また，ω の元の間の関係 f を，

$$f=\{(x, y)\in \omega\times\omega \mid x\leqq y\}$$

によって定めれば，$x, y\in\omega$ について

$$x \underset{f}{\sim} y \Leftrightarrow x\leqq y.$$

集合 a の元の間の関係 f は，つぎの条件 (i), (ii), (iii) が満たされるとき，**同値関係** (equivalence relation) と呼ばれる．

(i)　$f\supset \Delta_a$

(ii)　$f^{-1}=f$

(iii)　$f \circ f \subset f$.

これらの条件は，記号$\sim (= \underset{f}{\sim})$を用いて表わせばそれぞれつぎのようになる($x$, y, zはaの任意の元である).

(i)′　$x \sim x$　(反射律)

(ii)′　$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$　(対称律)

(iii)′　$x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$　(推移律).

集合aの元の間の関係fとして，Δ_aまたは$a \times a$をとればそれは同値関係となる.（Δ_aをグラフとする関係はaの元の間の**相等関係**(equality relation)と呼ばれる.）ωの元の間の関係fとして，上にあげた，$f = \{(x, y) \in \omega \times \omega \mid x \leqq y\}$をとれば，これは反射律および推移律は満たすが，対称律は満たさないので，同値関係とはならない.

問題 3.1　Gを群，aをG空間とする.

$$f = \{(x, y) \in a \times a \mid \exists g (g \in G \wedge g(x) = y)\}$$

とすると，fはaの元の間の同値関係となることを示せ.（この関係fを，‘Gの作用によって定まる同値関係’と呼ぶ.）——

集合aとその元の間の同値関係f，およびaの元xが与えられたとき，aの部分集合$f(x)$を，xを**代表元**(representative)とするfに関する**同値類**(equivalence class)と呼ぶ．定義により，

$$f(x) = \{y \in a \mid y \underset{f}{\sim} x\}.$$

特にGを群，aをG空間，$a \ni x$とし，fをGの作用によって定まるaの元の間の同値関係とするとき，同値類$f(x)$を$G(x)$とも書き，これをxを含むaのG**軌道**(G-orbit)とも呼ぶ.

定理 3.1　集合aの元の間の同値関係f，aの元x, yが与えられたとき，つぎの(i), (ii)が成り立つ.

(i)　$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \underset{f}{\sim} y$

(ii)　$f(x) \cap f(y) \neq \phi \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

問題 3.2　上の定理3.1を証明せよ．——

集合a, bについて，

(i)　$b = \bigcup a$

(ii)　$\forall x \forall y(x \in a \wedge y \in a \wedge x \cap y \neq \phi \Longrightarrow x=y)$

が成り立つとき，b を a の**直和** (direct sum) と呼ぶ.

集合 a と，その元の間の同値関係 f が与えられたとき，

$$a/f = \{X \in \mathcal{P}(a) \mid \exists x(x \in a \wedge X=f(x))\}$$

とおき，これを a の f による**商集合**と呼ぶ．定理3.1から直ちにわかるように，

$$a = \bigcup a/f \qquad (\text{直和})$$

となる.

定理 3.2　$a=\bigcup b$ (直和) のとき，

$$f = \{(x, y) \in a\times a \mid \exists z(z \in b \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

とおけば，f は a の元の間の同値関係となり，$z \in b$, $x \in z$ とすると，$f(x)=z$ となる.

問題 3.3　上の定理3.2を証明せよ．——

定理3.2によって与えられる同値関係 f を，**直和分割 $a=\bigcup b$ によって定まる同値関係**と呼ぶ.

$\mathfrak{A}=(A, \alpha)$ を半群とし，A の元 x, y に対して $x\alpha y$ を xy と書こう．A の元 x について，

$$\begin{cases} xy = xz \Longrightarrow y = z \\ yx = zx \Longrightarrow y = z \end{cases}$$

が，A の任意の元 y, z について成り立つとき，x を A の (α に関する) **準正則元**と呼ぶことにしよう．A が単位的半群のとき，その正則元は準正則元である．また，$\mathfrak{A}=\bar{N}^+$ とすると，$\bar{N}$ の任意の元は準正則元であり，$\mathfrak{A}=\bar{N}^\times$ とすれば，$\bar{N}$ の $\times$ に関する準正則元は $\bar{N}$ の元で0とは異なる任意のものである.

半群 A の準正則元全体から成る A の部分集合を A' と書こう．A' は ϕ でなければ，A の部分半群となる (読者自ら確かめられたい)．A' が ϕ ではないとき，その任意の部分半群を，A の**準正則部分半群**と呼び，A' を A の**全準正則部分半群**と呼ぶことにする.

ここで，つぎの定理が成り立つ.

定理 3.3　$\mathfrak{A}=(A, \alpha)$ を可換半群，B を A の準正則部分半群とし，$A\times B$ の元の間の関係 f を

$$f=\{((x,y),(x',y'))\in(A\times B)\times(A\times B)\mid xy'=x'y\}$$

によって定める($x\alpha y$ を xy と書く)．すると f は同値関係である．

証明　記号 $\sim(=\underset{f}{\sim})$ を用いて書けば，

$$(x,y)\sim(x',y')\Longleftrightarrow xy'=x'y \qquad (x,x'\in A,\ \ y,y'\in B)$$

となる．この関係が反射律および対称律を満たすことは明らかだから，推移律も満たされることを示せばよい．$x,x',x''\in A$, $y,y',y''\in B$ とし，$(x,y)\sim(x',y')\wedge(x',y')\sim(x'',y'')$ が成り立つとする．ここで，$\mathfrak{A}$ が可換半群であること，および，$xy'=x'y$, $x'y''=x''y'$ となることを用いると，

$$\begin{aligned}y'(xy'')&=(y'x)y''=(xy')y''=(x'y)y''=x'(yy'')\\&=x'(y''y)=(x'y'')y=(x''y')y=(y'x'')y=y'(x''y)\end{aligned}$$

が成り立つ．y' は準正則元であるから，$xy''=x''y$ すなわち $(x,y)\sim(x'',y'')$ が成り立つ．▌

$\mathfrak{A}=(A,\alpha)$ を可換半群，B を A の準正則部分半群とし，$A\times B$ の元の間の同値関係 f を上の定理のように定める．商集合 $(A\times B)/f$ を $(A_B)_\alpha$ または A_B と表わし，その元で $(x,y)\in A\times B$ によって代表されるものを $(x/y)_\alpha$ または x/y と書こう．$(x_0,y_0)\underset{f}{\sim}(x_0',y_0')\wedge(x_1,y_1)\underset{f}{\sim}(x_1',y_1')$ $(x_0,x_0',x_1,x_1'\in A,\ \ y_0,y_0',y_1,y_1'\in B)\Longrightarrow(x_0x_1,y_0y_1)\underset{f}{\sim}(x_0'x_1',y_0'y_1')$ となることが容易に確かめられるので，A_B の算法 $\tilde{\alpha}$ を

$$x_0/y_0\,\tilde{\alpha}\,x_1/y_1=x_0x_1/y_0y_1$$

によって定めることができる．$(A_B,\tilde{\alpha})$ は明らかに可換半群となる．また，$y_0\in B$ のとき，A_B の任意の元 x/y について，

$$y_0/y_0\,\tilde{\alpha}\,x/y=y_0x/y_0y=x/y$$

となるので，A_B は単位元 $\bar{e}=y_0/y_0$ を持つ．$(A_B,\tilde{\alpha})$ を，$\mathfrak{A}$(または A)の B による(α に関する)**商半群**と呼ぶことにする．$B\ni y_0,y_1$ のとき，A_B の元 y_0/y_1 は正則元である($y_1/y_0\tilde{\alpha}y_0/y_1=y_0y_1/y_0y_1=\bar{e}$ となる！)．特に，$B=A$ の場合には，A_A は可換群となる．一方，A が単位元 e を持ち，$e\in B$ ならば，

$$x/e=x'/e\Longleftrightarrow x=x' \qquad (x,x'\in A)$$

となるから，A の元 x に A_B の元 x/e を対応させることによって得られる写像は，A から A_B への同型写像となる．したがって，(A,α) が単位的可換半群で，A の任意の元が準正則元ならば，A を可換群 A_A の部分半群であるとみなすこ

とができる．このような (A, α) として特に $(\bar{\boldsymbol{N}}, +)$ をとることができる．$(\bar{\boldsymbol{N}}_{\bar{\boldsymbol{N}}})_+$ を**整数全体の集合**と呼び，$\boldsymbol{Z}$ と書くのである！ $\boldsymbol{Z}$ の元を**整数** (integer) と呼ぶ．可換群 $(\boldsymbol{Z}, \widetilde{+})$ を単に $(\boldsymbol{Z}, +)$ と書いて，**整数の加法群**と呼び，$\boldsymbol{Z}^+$ とも書く．$\bar{\boldsymbol{N}} \ni a, b$ に対して，$\boldsymbol{Z}$ の元 $(a/b)_+$ を $a-b$ と書く．上に述べたように，$\bar{\boldsymbol{N}}$ の元 a と $\boldsymbol{Z}$ の元 $a-0$ とを同一視し，$\bar{\boldsymbol{N}} \subset \boldsymbol{Z}$ と考える．また，$0-a$ を単に $-a$ と表わす．定義により，$a, b, c, d \in \bar{\boldsymbol{N}}$ のとき，

$$a-b = c-d \iff a+d = c+b$$

となる．定理 2.6 によって，$a>b$ ならば $a=b+c$ となるような $c \in \boldsymbol{N}$ が a, b によって定まるが，このとき $a-b=(b+c)-b=c-0=c$ となる．また，$a<b$ ならば $b=a+c$ となるような $c \in \boldsymbol{N}$ が定まるが，このとき $a-b=0-c=-c$ となる．こうして $\boldsymbol{Z}$ の任意の元は $0, a$ あるいは $-a$ $(a \in \boldsymbol{N})$ と書けることがわかった．算法 $+$ は $\bar{\boldsymbol{N}}$ の加法の $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ への拡張とみなされ，$x=a-b$, $y=c-d$ のとき，$x+y=(a+c)-(b+d)$ となる．特に，$a \in \boldsymbol{N}$ のとき，$a+(-a)=a-a=0$ が成り立ち，$-a$ は a の逆元となることがわかる．一般に $\boldsymbol{Z}$ の任意の元 x に対して，その逆元を $-x$ と書こう．すると，$-(-x)=x$, また $x=a-b$ $(a, b \in \bar{\boldsymbol{N}})$ のとき $-x=b-a$ となる．$a, b \in \bar{\boldsymbol{N}}$ のとき，$a-b=a+(-b)$ となる．一般に，$\boldsymbol{Z} \ni x, y$ のとき，$x+(-y)=x-y$.

上に述べたこと，および定理 2.6 により，$a, b \in \bar{\boldsymbol{N}}$ について，$a>b \iff a-b \in \boldsymbol{N}$ が成り立つ．一般に $\boldsymbol{Z}$ の元 x, y について，$x-y \in \boldsymbol{N}$ のとき $x>y$ と書き，x は y よりも大きい（または y は x よりも小さい）ということにし，$x>y \vee x=y$ を，自然数の場合のように $x \geqq y$ と書く．上に述べたことにより，$\boldsymbol{Z}$ の任意の元 x, y に対して，

$$x > y, \quad x = y, \quad x < y$$

の中のどれかが，そしてどれか一つのみが成り立つ．$\boldsymbol{Z}$ の元 x で 0 よりも大きいものを**正** (positive)，0 よりも小さいものを**負** (negative) の整数という．

問題 3.4 $\boldsymbol{Z}$ の元 x, y, z についてつぎの (i)-(iv) が成り立つことを示せ．

(i) $x \geqq y \wedge y \geqq x \iff x = y$

(ii) $x \geqq y \wedge y \geqq z \Longrightarrow x \geqq z$

(iii) $x \geqq y \iff x+z \geqq y+z$

(iv) $x \geqq y \iff x-z \geqq y-z$. ——

さて$(\boldsymbol{Z},+)$のように可換な群で，その算法が加法の形で書かれるものを**加群** (additive group, module) と呼ぶ．加群としての$\boldsymbol{Z}$は，上述のように可換半群$(\bar{\boldsymbol{N}},+)$からその商群として構成されるが，$\boldsymbol{Z}$の元の間には‘乗法’も定義されることを，われわれは‘常識’として知っている．集合論的に構成された$\boldsymbol{Z}$の算法として，‘普通’の乗法と同様のものをつぎに与えよう．算法$\times:\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$は，まず$\bar{\boldsymbol{N}}$の乗法の拡張となっているべきである．また，$\times$は分配法則“$x\times(y+z)=x\times y+x\times z$”をも満たすべきである．特に$a,b\in\bar{\boldsymbol{N}}$に対して，$a\times(b+(-b))=a\times b+a\times(-b)$となるべきだが，$a\times(b+(-b))=a\times 0=a0=0$, $a\times b=ab$だから，$a\times(-b)=-ab$となるべきである．さらに，$a\times(-b)+(-a)\times(-b)=(a-a)\times(-b)=0\times(-b)=-0b=0$となることがのぞましいから，$(-a)\times(-b)=-(a\times(-b))=-(-ab)=ab$となるべきである．これらから，算法$\times$は

(3.1) $\qquad (a-b)\times(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc) \qquad (a,b,c,d\in\bar{\boldsymbol{N}})$

を満たすべきであることとなる．

さて上の(3.1)によって算法$\times:\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$を定義したいが，それには

(3.2) $\qquad a-b=a'-b',\quad c-d=c'-d'$

$$\Longrightarrow (ac+bd)-(ad+bc)=(a'c'+b'd')-(a'd'+b'c')$$

が成り立つことを示さなければならない．そのために$A=(ac+bd)+(a'd'+b'c')$, $A'=(a'c'+b'd')+(ad+bc)$とおく．今$a+b'=a'+b$, $c+d'=c'+d$を仮定して$A=A'$を示すのが目的であるが，そのためには$A+b'c=A'+b'c$を示せば十分である．ところが，

$$\begin{aligned}
A+b'c &= \{(ac+b'c)+bd\}+(a'd'+b'c')\\
&= \{(a+b')c+bd\}+(a'd'+b'c')\\
&= \{(a'+b)c+bd\}+(a'd'+b'c')\\
&= \{a'(c+d')+bd\}+(bc+b'c')\\
&= \{a'(c'+d)+bd\}+(bc+b'c')\\
&= \{a'c'+(a'+b)d\}+(bc+b'c')\\
&= \{a'c'+(a+b')d\}+(bc+b'c')\\
&= \{a'c'+b'(d+c')\}+(ad+bc)\\
&= \{a'c'+b'(d'+c)\}+(ad+bc)\\
&= \{(a'c'+b'd')+(ad+bc)\}+b'c
\end{aligned}$$

$$= A'+b'c$$

となり，$A=A'$ すなわち (3.2) が成り立つ．

すなわち上の定義 (3.1) が意味を持つことが示された！

$\boldsymbol{Z}$ の元 x, y に対して，$x\times y$ を x と y の積と呼び，xy とも書く．上に注意したように，$x, y \in \bar{\boldsymbol{N}}$ ならば，$x\times y=xy$，$x\times(-y)=(-x)\times y=-(xy)$，$(-x)\times(-y)=xy$ となる．また，$\times$ に関して交換法則，結合法則が成り立つことも，容易に確かめられる．1 は $\times$ に関する $\boldsymbol{Z}$ の単位元となり，$(\boldsymbol{Z}, \times)$ は単位的可換半群となる．$(\boldsymbol{Z}, \times)$ を **$\boldsymbol{Z}$ の乗法半群**と呼び，$\boldsymbol{Z}^{\times}$ と表わす．

問題 3.5　x, y, z を $\boldsymbol{Z}$ の元とするとき，つぎの**分配法則**が成り立つことを示せ．

$$x(y+z) = xy+xz, \qquad (x+y)z = xz+yz.$$

問題 3.6　$x, y \in \boldsymbol{Z}$，z を 0 とは異なる $\boldsymbol{Z}$ の元とするとき，つぎのことが成り立つことを証明せよ．

(i)　$x > y \wedge z > 0 \Longrightarrow xz > yz$

(ii)　$x > y \wedge z < 0 \Longrightarrow xz < yz$

(iii)　$z^2 > 0$.

問題 3.7　整数 x に対し，$x \in \bar{\boldsymbol{N}}$ ならば $|x|=x$，$x \notin \bar{\boldsymbol{N}}$ ならば $|x|=-x$ とおき，$|x|$ を x の**絶対値** (absolute value) と呼ぶ．$x, y \in \boldsymbol{Z}$ に対して，つぎのことが成り立つことを証明せよ．

(i)　$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii)　$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

(iii)　$|xy| = |x||y|$

(iv)　$|x+y| \leqq |x|+|y|$　(三角不等式).

定理 3.4　$a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$ とすると，$c \in \boldsymbol{Z}$, $d \in \bar{\boldsymbol{N}}$ で

$$a = bc+d, \qquad d < b$$

となるようなものが，一意的に存在する．

証明　$S=\{x \in \bar{\boldsymbol{N}} \mid \exists y(y \in \boldsymbol{Z} \wedge x=a-by)\}$ とおく．容易にわかるように $a-b(-|a|) \in S$ だから S は $\bar{\boldsymbol{N}}$ の空ではない部分集合である．$d=\min S$ とおけば，S の定義により整数 c で $d=a-bc$，すなわち $a=bc+d$ となるようなものが存在する．ここで，もしも $d \geqq b$ ならば，$d-b=a-b(c+1) \in S$，$d>d-b \geqq 0$ となるか

ら d の最小性に反する．したがって，$d<b$ である．

いま，$a=bc'+d'$, $d'<b$ となるような整数 c'，および自然数 d' が存在するとしよう．このとき，$bc+d=bc'+d'$ であるが，もし $c\neq c'$ ならば $c>c'$ または $c<c'$ である．いま $c>c'$ とすれば，$b(c-c')=d'-d\geqq b$(問題2.11参照) だから，$d'\geqq b+d\geqq b$ となり，$d'<b$ に矛盾する．$c<c'$ のときも同様に矛盾が導かれ，$c=c'$ したがって $d=d'$ が示される．▌

§3.2 環，体，有理数体

前節までに得られた諸結果を用いて，さらに‘有理数体’，‘実数体’を集合論的に構成するのであるが，そのために，環，整域，イデアル，体などの代数学的諸概念についてもふれておくほうが記述が簡明になる．本講のテーマは集合論であるが，これらの諸概念も数学にとって基礎的なものであり，集合論の内容となるべき具体例をあげるためにも，ここで取り上げる意味があると思われる．ただし，本講ではこれらの代数学的諸概念についての叙述は，必要最小限の程度にとどめる．

2個の算法 α, β を持つ代数系 $\mathfrak{A}=(A, \{\alpha, \beta\})$ は，つぎの条件(i), (ii), (iii)が満たされるとき**環** (ring) と呼ばれる．

(i) α 系 (A, α) は単位的可換群である

(ii) β 系 (A, β) は半群である

(iii) A の任意の元 x, y, z に対して，つぎの**分配法則** (distributive law) が成り立つ．

$$(x\alpha y)\beta z = (x\beta z)\alpha(y\beta z)$$
$$x\beta(y\alpha z) = (x\beta y)\alpha(x\beta z).$$

$(\boldsymbol{Z}, \{+, \times\})$ は環である．$(A, \{\alpha, \beta\})$ を，上の(i), (ii), (iii)を満たす環とするとき，α を $+$，β を $\times$ または $\cdot$ などと書き，それぞれを A の**加法**，**乗法**と呼ぶことがふつうである．$A\ni x, y$ について，$x\times y$ を xy とも書く．$(A, +)$ を A^+ とも書き，これを環 $(A, \{+, \times\})$ (または A) の**加法群**と呼び，その単位元を A の**零元**と呼んで 0_A または 0 と表わす．A の任意の元 x について，

$$0x = (0+0)x = 0x+0x$$

となるから，$0x=0$ となる．x の，加法に関する逆元を $-x$ と書き，A の元 x,

y に対して，$x+(-y)$ を $x-y$ とも書く．$(-x)y+xy=0y=0$ だから $(-x)y=-(xy)$，また，$(-x)(-y)=-(x(-y))=-(-(xy))=xy$ となる．$(A,\times)$ は $A^\times$ とも書かれ，これを A の**乗法半群**と呼ぶ．$A^\times$ が可換半群であるとき，$(A,\{+,\times\})$（または A）は**可換環**と呼ばれ，$A^\times$ が単位的であるとき，$(A,\{+,\times\})$（または A）は**単位的環**と呼ばれる．$\boldsymbol{Z}$ は単位的可換環である．環 A の部分代数系を，A の**部分環**(subring)という．m を $\boldsymbol{Z}$ の元とするとき，$m\boldsymbol{Z}=\{x\in\boldsymbol{Z}\mid\exists y(y\in\boldsymbol{Z}\wedge x=my)\}$ とおけば，$m\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ の加法および乗法に関して閉じており，$\boldsymbol{Z}$ の部分環となる．特に $0\boldsymbol{Z}=\{0\}$．零元のみから成る環を**零環**と呼ぶ．

例 3.1　$(R,\{+,\times\})$ を環，$(S,\times)$ を半群とし，

$$R[S]=\{f\in R^S\mid|\{\sigma\in S\mid f(\sigma)\neq 0\}|<\infty\}$$

とおく．(S が有限ならば，$R[S]=R^S$ である.)　ここで，$R[S]\ni f,g$ に対して，$R[S]$ の元 $f+g, f*g$ をそれぞれ

$$(f+g)(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)\qquad(\sigma\in S)$$

$$(f*g)(\sigma)=\sum_{\tau\nu=\sigma}f(\tau)g(\nu)\qquad(\sigma,\tau,\nu\in S)$$

によって定めることができる．(ただし，$\tau\times\nu$ を $\tau\nu$ と書き，$\sum_{\tau\nu=\sigma}f(\tau)g(\nu)$ は，$f(\tau), g(\nu)$ がともに 0 と異なるような τ,ν が有限個しかないから，有限和である.)　このとき，$(R[S],\{+,*\})$ は環となる．実際，$*$ について結合法則が成り立つことは，f,g,h を $R[S]$ の元とし，$\sigma\in S$ とするとき，

$$\begin{aligned}
f*(g*h)(\sigma)&=\sum_{\tau\mu=\sigma}f(\tau)(g*h)(\mu)\\
&=\sum_{\tau\mu=\sigma}f(\tau)\Bigl(\sum_{\nu\theta=\mu}g(\nu)h(\theta)\Bigr)\\
&=\sum_{\tau(\nu\theta)=\sigma}f(\tau)(g(\nu)h(\theta))\\
(f*g)*h(\sigma)&=\sum_{\mu\theta=\sigma}(f*g)(\mu)h(\theta)\\
&=\sum_{\mu\theta=\sigma}\Bigl(\sum_{\tau\nu=\mu}f(\tau)g(\nu)\Bigr)h(\theta)\\
&=\sum_{(\tau\nu)\theta=\sigma}(f(\tau)g(\nu))h(\theta)
\end{aligned}$$

からわかる．$(R[S],+)$ が加群となること，分配法則が成り立つことは，読者自ら確かめられたい．$(R[S],\{+,*\})$（または $R[S]$）を，S の R 上の**半群環**(semi-

group ring) と呼ぶことにする．S が群となるときには，$R[S]$ を**群環** (group ring) と呼ぶ．

例 3.2　$R=\boldsymbol{Z}$, $S=\mathfrak{S}_2$ とする．$\mathfrak{S}_2$ は単位元 e および，$\{0,1\}$ の置換 σ で，$\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ となるものから成る．また，$\sigma^2=e$ となる．群環 $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ の元 f,g を，$\boldsymbol{Z}$ の元 a,b に対して，$f(e)=a$, $f(\sigma)=0$, $g(e)=0$, $g(\sigma)=b$ によって定めて，f を a_e, g を b_σ と書こう．すると $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ の任意の元 h は，適当な整数 a, b をとって $h=a_e+b_\sigma$ のように表わされる．$a,b,c,d\in\boldsymbol{Z}$ のとき

$$(a_e+b_\sigma)*(c_e+d_\sigma)=(ac+bd)_e+(ad+bc)_\sigma$$

となる．$\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ は，したがって可換環であり，1_e はその単位元である．しかし，

$$(1_e+(-1)_\sigma)*(1_e+1_\sigma)=0_e+0_\sigma=0$$

となるので，$\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ は $\boldsymbol{Z}$ とは異なり，$\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ の 0 ではない 2 元の‘積’が 0 になることもある．——

環 R の 0 とは異なる元 x に対して，R の 0 とは異なる元 y で $xy=0$ または $yx=0$ となるようなものがあるとき，x を R の**零因子** (zero divisor) と呼ぶ．例 3.2 で見たように，$\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ の元 1_e+1_σ は $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{S}_2]$ の零因子である．環 R が零環とは異なるとき，その元 x で 0 とは異なるものが零因子ではないことと，x が R の乗法に関して準正則元であることとは同値である．(実際，x が零因子でなく，0 とも異なるとき，$R\ni y,z$ について $xy=xz$ となれば $x(y-z)=0$, ゆえに $y=z$ となる．$yx=zx\Longrightarrow y=z$ も同様に成り立つ．逆に x が $R^\times$ の準正則元ならば $x\neq0$, しかも x は零因子ではないことも，明らかである．)

零環とは異なる単位的可換環は，零因子を含まないとき**整域** (integral domain) と呼ばれる．$\boldsymbol{Z}$ は整域である．

問題 3.8　R を整域とすれば半群環 $R[\bar{N}^+]$ も整域となることを示せ．$\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{Z}^\times]$ は整域となるか．——

R を整域とし，その単位元を 1 と書こう．$R-\{0\}$ は R の乗法に関して，$R^\times$ の全準正則部分半群を成す．S を 1 を含む $R^\times$ の準正則部分半群とし，R の S による (乗法 $\times$ に関する) 商半群 $(R_S,\times)$ を考えよう．R_S の元 x_0/y_0, x_1/y_1 の積 $x_0/y_0\cdot x_1/y_1=x_0/y_0\times x_1/y_1$ は，x_0x_1/y_0y_1 である．R_S の元 x_i/y_i, x_i'/y_i' $(i=0,1)$ に対して，

$$x_0/y_0=x_0'/y_0'\wedge x_1/y_1=x_1'/y_1'$$

$$\Longrightarrow (x_0y_1+x_1y_0)/y_0y_1 = (x_0'y_1'+x_1'y_0')/y_0'y_1'$$

が成り立つことがわかる(読者自ら確かめられたい)．したがって，$x_0/y_0, x_1/y_1$ の和を

$$x_0/y_0+x_1/y_1 = (x_0y_1+x_1y_0)/y_0y_1$$

とおいて定義することができる．すると，$(R_S, \{+, \times\})$ は単位的可換環となり，$(R, \{+, \times\})$ はその部分環とみなしてよいことが，容易に確かめられる．またこのとき，S の任意の元は $R_S{}^{\times}$ の正則元となる．$(R_S, \{+, \times\})$(または R_S)を，R の S における**局所化環** (localized ring) と呼ぶ．特に $R_{R-\{0\}}$ を $\tilde{R}$ とおくと，その零元とは異なる任意の元は y_0/y_1 $(y_0, y_1 \in R-\{0\})$ と書けるから，それは $\tilde{R}^{\times}$ の正則元となる．

一般に，零環とは異なる単位的環 $(R, \{+, \times\})$ において，$R-\{0\}$ の任意の元が $R^{\times}$ の正則元となるとき，$(R, \{+, \times\})$(または R)を**体** (field) という．特に $R^{\times}$ が可換半群であるとき，R を**可換体** (commutative field) と呼ぶ．R が整域であるとき，局所化環 $\tilde{R}=R_{R-\{0\}}$ は可換体で，R を部分環として含む．$\tilde{R}$ を R の**商体** (quotient field) と呼ぶ．$\boldsymbol{Z}$ の商体 $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{Z}-\{0\}}$ を**有理数体** (rational number field) と呼び $\boldsymbol{Q}$ と書く．$\boldsymbol{Q}$ の元を**有理数** (rational number) と呼ぶ．

R を体とするとき，$R-\{0_R\}$ を R^* と書く．R^* は $R^{\times}$ の部分半群であるが，R^* の元はすべて正則元であるから群となり，体 R の**乗法群**と呼ばれる．

$\boldsymbol{Q}^*$ の元 z をとろう．$z=x/y$ $(x, y \in \boldsymbol{Z}-\{0\})$ と書けるが，ここで $x/y=x'/y'$ $(x', y' \in \boldsymbol{Z}-\{0\})$ となれば，$xy'=x'y$ だから，$(xy)(x'y')=(xy')(x'y)=(xy')^2>0$ となる(問題3.6参照)．したがって，このとき，$xy, x'y'$ はともに正であるか，あるいは負である．$xy>0$ のとき $z=x/y$ を**正**の有理数といって $z>0$ と書き，$xy<0$ のとき $z=x/y$ を**負**の有理数といって $z<0$ と書く．特に $x \in \boldsymbol{Z}$ のとき $z=x/1$ が正(または)負であることと x が正(または負)の整数であることは同値である．$\boldsymbol{Q} \ni z, z'$ について，$z-z'>0$(または <0)のとき z は z' よりも大きい(または小さい)といって，$z>z'$(または $z<z'$)と書く．$z>z' \vee z=z'$ を $z \geqq z'$ あるいは $z' \leqq z$ と表わす．

問題 3.9 x, y, z を $\boldsymbol{Q}$ の元とするとき，つぎのことが成り立つことを示せ．

(i) $x>y$, $x=y$, $x<y$ のどれか一つ，一つのみが成り立つ

(ii) $x \geqq y \wedge y \geqq x \Leftrightarrow x = y$

(iii)　$x \geqq y \wedge y \geqq z \Longrightarrow x \geqq z$

(iv)　$x \geqq y \Longleftrightarrow x+z \geqq y+z$

(v)　$x \geqq y \wedge z > 0 \Longrightarrow xz \geqq yz$

(vi)　$x \geqq y \wedge z < 0 \Longrightarrow xz \leqq yz$

(vii)　$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$.

問題 3.10　$\boldsymbol{Q}$ の元 x に対し，$x \geqq 0$ ならば $|x|=x$，$x<0$ ならば $|x|=-x$ とおき，$|x|$ を x の**絶対値**という．$x, y \in \boldsymbol{Q}$ に対して，つぎのことが成り立つことを示せ．

(i)　$|x| \geqq 0$,　$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii)　$|x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \vee x = -y$

(iii)　$|xy| = |x||y|$

(iv)　$|x+y| \leqq |x|+|y|$　(三角不等式)．——

$S \subset \boldsymbol{Q}$, $S \neq \phi$ のとき，$S \ni a$ で，S の任意の元 x に対して $a \geqq x$ となるようなものが存在すれば，a を S の**最大元** (maximum) と呼び，$\max S$ と書く．S の**最小元** (minimum) $\min S$ も同様に定義される．$\max S$, $\min S$ は存在すれば一意的である．

問題 3.11　$S \subset \boldsymbol{Q}$，$S \neq \phi$，$|S| < \infty$ とすれば，$\min S$, $\max S$ がともに存在することを示せ．

§3.3　イデアル，商環

さらに進むための準備として，環 $\mathfrak{A}=(R, \{+, \times\})$ の‘イデアル’について述べよう．R の空集合とは異なる部分集合 A は，つぎの条件 (i), (ii) が満たされるとき $\mathfrak{A}$(または R) の**両側イデアル** (two-sided ideal) または単に**イデアル** (ideal) と呼ばれる．

(i)　A は加法について閉じており，$(A, +)$ は R^+ の部分加群となる

(ii)　R の任意の元 x，A の任意の元 a に対して，$xa \in A$，$ax \in A$.

環 R の‘自明な’イデアルとして R 自身または $\{0_R\}$ がある．$\boldsymbol{Z}$ のイデアル A で $\{0\}$ とは異なるものを考えよう．A の元 a に対して，$-a=-1 \times a \in A$ となるから，$A \cap \boldsymbol{N} \neq \phi$．ここで $m=\min(A \cap \boldsymbol{N})$ とおけば，$A=m\boldsymbol{Z}$ となることが示される．実際，$a \in A$ とすると，$a=mc+d$, $d<m$ となるような $c \in \boldsymbol{Z}$, $d \in \tilde{\boldsymbol{N}}$ が存

在する（定理3.4）が，$d=a-mc$ なので $d\in A\cap\bar{\boldsymbol{N}}$．ゆえに，$m$ の最小性により $d=0$ とならなければならない．ゆえに，$a\in m\boldsymbol{Z}$．ゆえに，$A\subset m\boldsymbol{Z}$ だが，$m\boldsymbol{Z}$ の任意の元 my は，$m\in A$ により A に含まれるから $m\boldsymbol{Z}\subset A$．こうして，$A=m\boldsymbol{Z}$ となることがいえた．逆に，任意の自然数 m に対して，$m\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ のイデアルとなることも明らかである．（特に $0\boldsymbol{Z}=\{0\}$，$1\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}$.）こうして，$\boldsymbol{Z}$ のイデアルは決定された．

環 R のイデアル A が与えられたとき，R の元の間の関係 f を，$f=\{(x,y)\in R\times R\mid x-y\in A\}$ とおいて定めよう．ここで，R の元 x,y に対して，$x\underset{f}{\sim}y$ を $x\equiv y \bmod A$ と表わし，これを‘x と y は A を法として**合同**（congruent）である’と読む．$x\equiv y \bmod A$ は，単に $x\equiv y\,(A)$ とも書かれる．f が同値関係となることは，容易に確かめられる．商集合 R/f を R/A と書き，その元で R の元 x によって代表されるものを $(x)_A$ と書く．また，$x,x',y,y'\in R$ に対して，

$$x\equiv x'\ \ (A)\wedge y\equiv y'\ \ (A)$$
$$\Longrightarrow x+y\equiv x'+y'\ \ (A)\wedge xy\equiv x'y'\ \ (A)$$

が成り立つ．（実際，$xy\equiv x'y'\,(A)$ が成り立つことは，$xy-x'y'=(xy-xy')+(xy'-x'y')=x(y-y')+(x-x')y'$ で，$y-y'\in A$, $x-x'\in A$ しかも A は R のイデアルであるから，$x(y-y')+(x-x')y'\in A$ となって，証明される．$x+y\equiv x'+y'\,(A)$ も明らかである.）したがって，商集合 R/A の元 $(x)_A$, $(y)_A$ の和，積を，それぞれ

$$(x)_A+(y)_A=(x+y)_A,\qquad (x)_A\times(y)_A=(xy)_A$$

によって定義することができる．$(x)_A\times(y)_A$ を $(x)_A(y)_A$ とも書く．すると，$(R/A,\{+,\times\})$ が環となることが容易に確かめられる．この環 R/A を $\mathfrak{A}$（または R）の A による**剰余環**（residue ring）または**商環**（quotient ring）と呼ぶ．

例 3.3　R を環，$S=R[\bar{N}^{+}]$ とし，$A=\{f\in S\mid f(0)=0_R\}$ とおくと，A は S のイデアルとなる．また，$R'=\{f\in S\mid\forall n(n\in\bar{N}-\{0\}\Longrightarrow f(n)=0)\}$ とおけば，R' は S の部分環となり，R' の元 f に R の元 $f(0)$ を対応させる写像は，環 R' から環 R の上への同型写像となる（したがって，$R'\cong R$）．この同型によって，R と R' を同一視し，R を S の部分環とみなそう．このとき，S の元 f に対して，$f\equiv f(0)$ (A) が成り立つ．このことから $S/A\cong R$ となることがわかる．（読者はこれらのことを確かめられたい.）

例 3.4　$m\in N$ のとき，商環 Z/mZ は，$A=mZ$ と書けば，$\{(0)_A, (1)_A, \cdots, (m-1)_A\}$ という m 個の元から成る集合になる．実際，定理3.4により，Z の任意の元 a は，$a=mc+d$, $d<m$ $(c\in Z,\ d\in \bar{N})$ と書けるから，$a\equiv d\ (mZ)$，したがって $(a)_A=(d)_A$, $0\leqq d\leqq m-1$ となるような自然数 d が確定する．ゆえに，$Z/mZ=\{(0)_A, (1)_A, \cdots, (m-1)_A\}$．$(0)_A$, $(1)_A$ はそれぞれ Z/mZ の零元および単位元となる．

例 3.5　$R=Z/2Z$ の零元を 0，単位元を 1 と書けば，$R=\{0, 1\}$ で，$1+1=0$ となる．R は体となることも容易に確かめられる．

問題 3.12　$Z/3Z$ は体になること，$Z/4Z$ は整域にはならないことを確かめよ．——

単位的可換環 R のイデアル A は，R/A が整域となるときに R の**素イデアル** (prime ideal) と呼ばれ，R/A が体となるとき R の**極大イデアル** (maximal ideal) と呼ばれる．R が整域ならば $\{0_R\}$ は R の素イデアルであるが，R が体でなければこれは極大イデアルではない．

定理 3.5　R を単位的可換環（で，零環とは異なるもの），A を R のイデアル $(\neq R)$ とする．A が R の極大イデアルであることと，A を含む R のイデアルで A とは異なるものは R 以外には存在しないこととは同値である．

証明　A が R の極大イデアルであるとしよう．（このとき，R/A は体で，零環とはなり得ないから $A\subsetneqq R$.）B を A を含む R のイデアルで，A とは異なるものとすれば，$B=R$ となることを示そう．$x\in B-A$ とすれば，R/A の元 $(x)_A$ は $(R/A)^\times$ の正則元だから，R/A の元 $(y)_A$ で $(x)_A(y)_A=(1)_A$ となるようなものがある（1 は R の単位元）．したがって，$xy-1\in A\subset B$ となるが，$xy\in B$ なので $-1\in B$．ところが，$1=-1\times -1$ だから $1\in B$．ここで，z を R の任意の元とすれば，B は R のイデアルだから，$z\cdot 1=z\in B$，ゆえに $B\supset R$．B は R の部分集合だから，$B=R$ となる．逆に，A が R の極大イデアルでないとする．このとき R/A の 0 とは異なる元 $(x)_A$ で $(R/A)^\times$ の正則元にならないものがとれる．このとき

$$B=\{y\in R\mid \exists a\exists b\,(a\in A\wedge b\in R\wedge y=a+bx)\}$$

とおけば明らかに B は R のイデアルで $A\subsetneqq B$，また $1\notin B$．ゆえに $B\subsetneqq R$. ▌

例 3.6　Z のイデアル mZ, nZ $(m, n\in \bar{N})$ に対して，

$$mZ \subset nZ \Leftrightarrow n | m$$

が成り立つことは，定義により明らかである．これから，$mZ \neq Z$ のとき，mZ が極大イデアルであることと，m は素数であることとが同値であることがわかる．したがって，p を素数とすると，Z/pZ は p 個の元から成る体となる．Z/pZ は F_p あるいは $GF(p)$ とも書かれ，位数 p の**有限体**あるいは **Galois 体**と呼ばれる．

また $m \in N$ に対して $S_m = \{n \in N | n | m\}$ とおけば $S_m \ni m$. 特に $m > 1$ のとき $S_m - \{1\} \neq \phi$ だから $p = \min(S_m - \{1\})$ とおけば，p は明らかに素数であり，このとき，$mZ \subset pZ$ となる．これから Z のイデアル mZ で $\{0\}$ とも Z とも異なるものは必ず或る極大イデアルに含まれることがわかる．——

上の例から $m \in N - \{1\}$ のとき，素数 p で，$p | m$ となるようなものがあることがわかり，このことから，素数が無限に存在することが示される．実際，素数が有限個しかないとし，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ がそのすべてであるとして矛盾を導こう．$m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ とおき，p_i を，$p_i | m$ となる素数とすれば，$m \equiv p_1 p_2 \cdots p_n \equiv 0 \mod p_i$ だから $1 \equiv 0 \mod p_i$ となり，これは明らかに矛盾である．

第4章　有理数と実数，選出公理

§4.1　実　数

‘実数全体の集合’を構成しよう．(以下に述べる構成法は，もちろん唯一のものではない．実際には，以下のものとはいくらか趣を異にする‘Dedekind の切断’と呼ばれる方法があり，それによって実数の概念が定義されることが多い．これについては本選書の“解析入門”を参照されたい.)

有理数の‘数列’の集合を考えよう．すなわち $S=\boldsymbol{Q}^{\omega}$ とおき，S の元 f を**有理数の数列**と呼ぶのである．S の元 f としては，$f(0)=0$, $f(1)=0$, $\cdots$, $f(n)=0$, $\cdots$ となるもの，あるいは，$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $\cdots$, $f(n)=n$, $\cdots$ となるものなど，様々のものがある．$\omega \ni n$ について，$f(n)=a_n$ となるような f を，$(a_n)_{n\in\omega}$ または略して $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ などとも表わす．S の元 f, g が与えられたとき，それらの‘和’,‘積’を

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n), \qquad (fg)(n)=f(n)g(n) \qquad (n\in\omega)$$

によって定義すれば，$f+g, fg\in S$ となり，容易に確かめられるように $(S, \{+, \times\})$ は可換環となる．S の零元 f は任意の自然数 n に対して $f(n)=0$ となるようなものすなわち $(0, 0, \cdots)$ である．また，S の元 g で任意の自然数 n に対して $g(n)=1$ となるものをとれば，g は明らかに S の単位元となる．いま $\boldsymbol{Q}'=\{f\in S \mid \exists a[a\in\boldsymbol{Q}\wedge\forall n(n\in\omega\Longrightarrow f(n)=a)]\}$ とおこう．$\boldsymbol{Q}'$ の元 f は，或る有理数 a について，$f(0)=a$, $f(1)=a$, $\cdots$, $f(n)=a$, $\cdots$ となるようなものすなわち $(a, a, \cdots)$ と表わされるようなものである．$\boldsymbol{Q}'$ は S の部分環で，$\boldsymbol{Q}'$ の元 f に $\boldsymbol{Q}$ の元 $f(0)$ を対応させる写像は $\boldsymbol{Q}'$ から $\boldsymbol{Q}$ の上への環の同型写像となる．したがって，$\boldsymbol{Q}'$ と $\boldsymbol{Q}$ を同一視し，$\boldsymbol{Q}$ を S の部分環とみなすことができる．この意味で，S の零元，単位元をそれぞれ $0, 1$ と表わしても差支えないのである．

単位的可換環 S は整域ではない．実際 S の元 f, g を，

$$f(0)=1, \qquad f(n)=0 \quad (n\in\omega-\{0\});$$
$$g(0)=0, \qquad g(n)=1 \quad (n\in\omega-\{0\})$$

によって定めれば，f も g も零元ではないが，$fg=0$ となる．

S の部分集合 B を，

$$B=\{f\in S\,|\,\exists a[a\in \boldsymbol{Q}\wedge a\geqq 0\wedge \forall n(n\in\omega\Longrightarrow |f(n)|\leqq a)]\}$$

によって与えよう．B の元 f を**有界有理数列** (bounded rational sequence) と呼ぼう．上に例として述べた $f=(1,0,0,\cdots)$，$g=(0,1,1,\cdots)$ はともに B に含まれ，$a=(a,a,\cdots)$ $(a\in\boldsymbol{Q})$ も有界有理数列である．有界有理数列 f に対して，$|f(n)|\leqq a$ が任意の自然数 n について成り立つような正の有理数 a が存在するが，そのような有理数 a を f の**絶対上界** (absolute upper-bound) と呼ぶことにしよう．ここで，$b\geqq a$ となるような有理数 b をとれば，b も f の絶対上界となるので，f の絶対上界は f によって一つに確定するわけではない．

f,g を有界有理数列，a,b をそれぞれ f,g の絶対上界とすれば，任意の自然数 n に対して，

$$|(f+g)(n)|=|f(n)+g(n)|\leqq a+b$$
$$|(fg)(n)|=|f(n)g(n)|\leqq ab$$

が成り立つので，$f+g,fg$ はともに B に含まれる．こうして B は $\boldsymbol{Q}$ を含む S の部分環となることがわかった．

先へ進む前に，有理数列 $f=(0,1,2,\cdots)$ $(f(n)=n\,(n\in\omega))$ は B に含まれるか否かについて考えよう．直観的には，f が有界ではないこと，すなわち $f\notin B$ は明らかのようであるが，実際そうだろうか．$f\notin B$ となることは，容易にわかるのだが，後で役立てるためにも，この事柄を正確に証明しておこう．そのためには，つぎの定理を証明すればよい．

定理 4.1　任意の正の有理数 a に対して，自然数 n,m で (ともに 0 とは異なり)，$0<1/n\leqq a\leqq m$ となるようなものが存在する．

証明　まず，x を正の有理数とすれば，$xx^{-1}=1>0$ だから $x^{-1}>0$ となることに注意しよう．(したがって，$n\in\boldsymbol{N}$ のとき $1/n=n^{-1}>0$ である．) ゆえに，$n\geqq 1$ $(n\in\boldsymbol{N})$ とすれば $1=n\times 1/n\geqq 1/n$ が成り立つ．正の有理数 a は，$a=m/n$ $(m,n\in\boldsymbol{N})$ と表わされる．$1\leqq m$ より，$1/n\leqq m/n=a$，さらに，$1/n\leqq 1$ より $a=m/n\leqq m$ が導かれる．▌

この定理により，任意の正の有理数 a に対して，$a\leqq m$ となるような自然数 m があり，したがって $a<m+1$ となるから，有理数列 $(0,1,2,\cdots,m,m+1,\cdots)$

は B には含まれない.

定理 4.2 k を 1 よりも大きい自然数とし, a を正の有理数とすると, 自然数 m を適当に選べば, $n \geqq m$ となるような任意の自然数 n に対して, $1/k^n < a < k^n$ となるようにできる.

証明 まず, $n \in \bar{N}$ についての命題 $P(n)$ として "$k^n > n$" をとり, これがすべての $n \in \bar{N}$ について成り立つことを示そう. $P(0)$ は, $k^0 = 1 > 0$ だから成り立つ. また $P(1)$ は, $k^1 = k > 1$ だから成り立つ. いま $n \geqq 1$ とし, $P(n)$ が成り立つことを仮定して, $P(n+1)$ も成り立つことを示そう. $k^{n+1} = k^n k > nk$ となるが, $nk - (n+1) = n(k-1) - 1$ となり, いま $n \geqq 1$, $k-1 > 0$ と仮定しているから $n(k-1) - 1 \geqq 0$, すなわち $nk \geqq n+1$ となる. したがって, $k^{n+1} > n+1$ となり, $P(n+1)$ も成り立つ. こうして, 数学的帰納法により, $k^n > n$ が任意の自然数 n に対して成り立つことがわかった.

定理 4.1 により $a \leqq m_1$ となるような自然数 m_1 が存在する. ゆえに, $k^{m_1} > m_1 \geqq a$ となり, n を m_1 よりも大きい自然数とすれば, 明らかに $k^n > k^{m_1}$ となる (実際このとき $n = m_1 + a$, $a \in N$ となるから $k^n = k^{m_1} k^a$, ゆえに $k^{m_1} | k^n$ となり, $k^n > k^{m_1}$ が導かれる). ゆえに, そのような n に対して $k^n > a$ となる.

また, $1/a$ も正の有理数だから自然数 m_2 を適当に選べば $n \geqq m_2$ となるような任意の自然数 n に対して $k^n > 1/a$ が成り立ち, したがってこのとき $1/k^n < a$ となる. ここで, $m = \max\{m_1, m_2\}$ とおけば, 明らかに定理が成り立つ. ▮

上の定理の証明の中でも示されたように, k を 1 よりも大きい自然数とすれば, 任意の自然数 n に対して $k^n > n$, さらに, n, m を自然数で $n > m$ となるものとすれば, $k^n > k^m$, $1/k^n < 1/k^m$ がそれぞれ成り立つ. さて, ここで有理数列 f で, $f(n) = \sum_{i=0}^{n} 1/k^i$ $(n \in \omega)$ によって与えられるものを考えよう. 明らかに, $f(n) \times 1/k + 1 = f(n+1)$ だから, $f(n) - f(n) \cdot 1/k = f(n) - f(n+1) + 1 = 1 - 1/k^{n+1}$, ゆえに $f(n) = (1 - 1/k^{n+1})/(1 - 1/k)$ が成り立つ. ここで, $1/k^{n+1} \leqq 1/k < 1$ が成り立つから, $0 < f(n) < 1/(1-1/k) = k/(k-1)$ となり, $f \in B$ がいえた. ところが, この f については, 単にこれが有界有理数列になるということのみではなく, "$f(n)$ と $f(m)$ の差が, n, m が大きくなるに従って, いくらでも小さくなる" ことがいえるのである. より正確にいおう. $n > m$ のとき明らかに $f(n) > f(m)$ となるが, $f(n) - f(m) = \sum_{i=m+1}^{n} 1/k^i$ で, $(f(n) - f(m))(1 - 1/k) = 1/k^{m+1} - 1/k^{n+1}$, ゆえに, このとき

$$0 < f(n)-f(m) < (1/k^{m+1})/(1-1/k) = 1/(k^{m+1}-k^m) = 1/k^m \times 1/(k-1)$$

となる．したがって，a を任意の正の有理数とするとき，自然数 m を $1/k^m < a(k-1)$ となるようにとれば，$n>m$ のとき，$0<f(n)-f(m)<a$ が成り立つのである．

有理数列 f について，つぎの条件(C)が成り立つとき，f を **(有理)Cauchy 列**(rational Cauchy sequence)または**基本有理数列**(fundamental rational sequence)と呼ぶ．

(C)　任意の正の有理数 a に対して，自然数 m を適当に選べば，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n について，$|f(n)-f(m)|<a$ となるようにできる．

k を 1 よりも大きい自然数とすると，上の $f(n)=\sum_{i=0}^{n} 1/k^i$ によって与えられる数列 f は Cauchy 列である．また，有理数 a を与えたとき，数列 $(a, a, a, \cdots)$ も Cauchy 列である．

ここで，

$$C = \{f \in S \mid f \text{ は Cauchy 列}\}$$

とおこう．明らかに $C \subset B$ となる．(実際，$f \in C$ のとき，自然数 m を適当に選べば，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n に対して $|f(n)-f(m)|<1$ となる．ここで，$a=\max\{|f(0)|, |f(1)|, \cdots, |f(m)|\}$，$b=a+1$ とすれば，b は明らかに f の絶対上界となる.）また，C は B の部分環となり，$\boldsymbol{Q}$ を含む．$\boldsymbol{Q} \subset C$ は明らかだから，$f, g \in C \Longrightarrow f+g, fg \in C$ となることを示そう．いま $f, g \in C$，a を与えられた正の有理数とし，自然数 m_1, m_2 をそれぞれ適当に選んで，$\omega \ni n_1, n_2$ で $n_i \geqq m_i$ $(i=1, 2)$ となるような任意のものに対して $|f(n_1)-f(m_1)|<a/2$，$|g(n_2)-g(m_2)|<a/2$ が成り立つようにしよう．ここで，$m=\max\{m_1, m_2\}$，$n \geqq m$ とすれば，$|(f+g)(n)-(f+g)(m)|=|(f(n)-f(m))+(g(n)-g(m))| \leqq |f(n)-f(m)|+|g(n)-g(m)|<a$ となり，$f+g \in C$ となることが示された．$fg \in C$ を示すため，正の有理数 b_1, b_2 を f, g の絶対上界とし，自然数 m_1, m_2 を適当に選んで，$n_i \geqq m_i$ $(i=1, 2)$ となるような任意の自然数 n_i に対して $|f(n_1)-f(m_1)|<a/2b_2$，$|g(n_2)-g(m_2)|<a/2b_1$ となるようにしよう．ここで $m=\max\{m_1, m_2\}$ とおけば，$n \geqq m$ となるような任意の自然数 n について，

$$\begin{aligned}|(fg)(n)-(fg)(m)| &= |f(n)g(n)-f(m)g(m)| \\ &= |(f(n)g(n)-f(m)g(n))+(f(m)g(n)-f(m)g(m))|\end{aligned}$$

$$\leqq |f(n)-f(m)||g(n)|+|f(m)||g(n)-g(m)|$$
$$< (a/2b_2)\cdot b_2+b_1\cdot a/2b_1 = a$$

となるから，$fg \in C$ である．

問題 4.1 B に属し，C には含まれないものの例をあげよ．また，$f \in C$ とするとき，$g \in S$ を，$|g(n)| \leqq |f(n)|$ $(n \in \omega)$ となるようなものとすれば $g \in C$ となることを示せ．——

f を有理数列としよう．もしも任意の正の有理数 a について，自然数 m を適当に選べば，$n \geqq m$ となるような任意の自然数 n に対して $|f(n)|<a$ となるようにできるなら，f は**零数列** (null sequence) と呼ばれる．

$$N = \{f \in S \mid f \text{ は零数列}\}$$

とおく．k を 1 よりも大きい自然数とするとき，有理数列 f を，$f(n)=1/k^n$ によって与えられるものとすれば，定理 4.2 によって，$f \in N$ となる．もちろん $(0, 0, \cdots) \in N$ である．

問題 4.2 つぎの (i)-(iv) を証明せよ．

(i) $N \subset C$

(ii) $f, g \in N \Longrightarrow f+g \in N$

(iii) $f \in N,\ g \in B \Longrightarrow fg \in N$

(iv) $N \cap \boldsymbol{Q} = \{0\}$．——

零数列の集合 N は，Cauchy 列の集合 C のイデアルとなる (問題 4.2 (i)-(iii) 参照)．N は C の極大イデアルとなるのだが，そのことを示すために，まずつぎの命題を証明しよう．

(1) f を C の元とすると，$f \in N$ となるための必要十分条件は，つぎの (*) である．

(*) 任意の正の有理数 a および任意の自然数 m に対して，$n \geqq m$ となる自然数 n で，$|f(n)|<a$ を満たすものが存在する．

[証明] $f \in N$ のとき (*) が成り立つことは明らかだから，その逆が成り立つことを示そう．正の有理数 a が与えられたとき，f は Cauchy 列だから自然数 m を適当に選べば，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n に対して $|f(n)-f(m)|<a/3$ が成り立つ．いま (*) が成り立つとすれば，$m' \geqq m$ となる自然数 m' で，$|f(m')| < a/3$ を満たすものがある．ここで，$|f(m)|=|(f(m)-f(m'))+f(m')| \leqq |f(m')-$

$|f(m)|+|f(m')|<2a/3$，また，$n \geqq m$ となるような任意の自然数 n に対して，$|f(n)|=|(f(n)-f(m))+f(m)| \leqq |f(n)-f(m)|+|f(m)|<a$ となるから，$f \in N$ である．▌

さて，$f \in C-N$ としよう．すると上の命題(1)および§1.1の命題(1.4)によって，正の有理数 a，自然数 m が存在し，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n に対し，$|f(n)| \geqq a$ が満たされる．ここで，有理数列 g を，m よりも小さい自然数 k に対しては $g(k)=0$，$k \geqq m$ ならば $g(k)=f(k)^{-1}=1/f(k)$ によって与えよう．$k \geqq m$ のとき $f(k) \neq 0$ だから $1/f(k)$ が意味を持つのである．このとき，$g \in C$ となることを示そう．そのため，b を任意の正の有理数とし，自然数 n を，$n' \geqq n$ となる任意の自然数 n' について，$|f(n')-f(n)|<a^2b$ を成り立たせるようなものとする．$l=\max\{m, n\}$ とし，l' を l またはそれよりも大きい自然数とすれば，$|g(l')-g(l)|=|1/f(l')-1/f(l)|=|f(l')-f(l)|/|f(l)f(l')|$ だが，l, l' はともに m またはそれよりも大きいから，$|f(l)f(l')| \geqq a^2$，したがって，$|g(l')-g(l)| \leqq |f(l')-f(l)|/a^2$ となる．ところが，いま $|f(l')-f(l)|<a^2b$ だから，$|g(l')-g(l)|<b$ となり，$g \in C$ が示された．

ここで，$h=fg$ とおけば，m よりも小さい自然数 k に対して $h(k)=0$，$k \geqq m$ のとき $h(k)=1$ である．したがって，$h-1 \in C$ (ただし，$1=(1,1,1,\cdots)$) は明らかに N の元となる．

以上の議論から，もしも A が C のイデアルで N を含み，$A \neq N$ となれば $A \ni 1$，したがって $A=C$ となることがわかる．すなわち，つぎの命題が証明された．

(2)　N は C の極大イデアルである．

定理3.5により，商環 C/N は体となる．ここで，$\boldsymbol{Q} \cap N=\{0\}$ だから，$\boldsymbol{Q}$ は C/N の部分体とみなされる．C/N を**実数体** (real number field) と呼び，$\boldsymbol{R}$ と表わす．$\boldsymbol{R}$ の元を**実数** (real number) と呼ぶ．$f \in C$ に対して，f を代表元とする $\boldsymbol{R}$ の元を，$\lim_{n\to\infty} f(n)$ または $\lim f$ と表わし，これを f の**極限** (limit) とも呼ぶ．定義により，$f, g \in C$ に対して，

$$\lim f+\lim g = \lim(f+g)$$
$$(\lim f)(\lim g) = \lim(fg)$$

となる．

問題 4.3　有理数列 f, g を

$$f(n) = 1/2^n, \qquad g(n) = \sum_{i=0}^{n} 1/2^i \qquad (n \in \omega)$$

によって定めれば，$f, g \in C$，さらに

$$\lim f = 0, \qquad \lim g = 2$$

となることを示せ．——

$\alpha = \lim f$ を $\boldsymbol{R}^*$ の元としよう．定義によって，このとき $f \in C - N$ であるから，正の有理数 a および自然数 m で $n \geqq m$ となるような任意の自然数 n に対して $|f(n)| \geqq a$ が成り立つようなものがある．また $f \in C$ により，自然数 k を適当に選べば，$n \geqq k$ となるような任意の自然数 n に対して $|f(k) - f(n)| < a/2$ が成り立つ．ここで，$l = \max\{m, k\}$ とおけば，$n \geqq l$ となる任意の自然数 n に対して $f(n) = f(l) + (f(n) - f(l))$，$|f(l)| \geqq a$，$|f(n) - f(l)| < a/2$ がみな成り立つから，$f(l) > 0$ ならば $f(n) > 0$，$f(l) < 0$ ならば $f(n) < 0$ となる．すなわち，有理数列 f に対して，$f(n)$ の正負は，n が‘十分大きい’ときには，一定になるのである．また，ここで零数列 g をとって，$f' = f + g$ とおけば，$\alpha = \lim f = \lim f'$ となるが，$f(n)$ が‘十分大きい’n に対して正(または負)になれば，$f'(n)$ も‘十分大きい’n に対して正(または負)になる(読者自ら確かめられたい)．ここで，$f(n)$ が‘十分大きい’n に対して正(または負)になるのに応じて，$\alpha = \lim f$ は**正**(または**負**)であるということにし，$\alpha > 0$(または $\alpha < 0$) と書く．特に $\alpha = \lim f$ として，$f = (a, a, \cdots)$ $(a \in \boldsymbol{Q})$ をとった場合，$\alpha > 0 \Leftrightarrow a > 0$ となる．$\boldsymbol{R}$ の元 α, β に対して，$\alpha - \beta > 0$ のとき $\alpha > \beta$ または $\beta < \alpha$ と書き，α を β より大きい(あるいは β を α より小さい)ということは，$\boldsymbol{Q}$ の場合と同様である．ここで，$\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ のどちらか，しかもその一つの場合のみが起こる．また，$\alpha \geqq \beta \wedge \alpha \leqq \beta$ ($\alpha \geqq \beta$ は $\alpha > \beta \vee \alpha = \beta$ の意味) $\Leftrightarrow \alpha = \beta$，さらに，$\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma \Longrightarrow \alpha > \gamma$ が成り立つことも容易に確かめられる．$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $S (\neq \phi)$ について，S の元 s で，S の任意の元 t に対して $s \geqq t$ (または $s \leqq t$) となるものがあれば，s を S の**最大元**(maximum)(または**最小元**(minimum))と呼び，$\max S$ (または $\min S$) と書く．$\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha < 0$ となるから，任意の実数 α についてその**絶対値** $|\alpha|$ を α または $-\alpha$ の中の正(または 0) のものとして定義しよう．ここで，$\alpha = \lim f$ とし，有理数列 f' を，$f'(n) = |f(n)|$ $(n \in \omega)$ とおいて定義すれば，容易にわかるように，$f' \in C$，$|\alpha| = \lim f'$ となる．また，

$$|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$$

$$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta| \qquad \text{(三角不等式)}$$

も容易に確かめられる．

定理 4.3　α を与えられた正の実数とすると，有理数 a, b で，$0<a\leqq\alpha\leqq b$ となるようなものが存在する．

証明　$\alpha=\lim f$ (f は有理 Cauchy 列) とする．$\alpha>0$ だから，定義により正の有理数 a および自然数 m で，$n\geqq m$ となるような任意の自然数 n に対して $f(n) \geqq a$ が成り立つようなものが存在する．再び定義により，$\alpha\geqq a$ である！ 一方，f は有界数列だから，正の有理数 b で，任意の自然数 n に対して $|f(n)|\leqq b$ となるようなものがある．このとき，明らかに $\alpha\leqq b$ である．▌

§4.2　有理数と実数

前節で実数体 $\boldsymbol{R}$ が構成され，そのいくつかの性質が明らかにされた．$\boldsymbol{R}$ は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ を部分体として含み，$\boldsymbol{Q}\supsetneqq\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Z}\supsetneqq\bar{\boldsymbol{N}}$ となる．$\boldsymbol{R}\supsetneqq\boldsymbol{Q}$ は成り立つだろうか．

‘数学的常識’によれば，“$\sqrt{2}$ は無理数，すなわち有理数ではない実数だから，$\boldsymbol{R}\supsetneqq\boldsymbol{Q}$ である”．$\sqrt{2}$ が有理数ではないということの証明には古くから知られているいろいろのものがある．しかし，$\sqrt{2}$ とは何だろうか．実数 α で，$\alpha^2=2$ となるようなものは存在するだろうか．

まず，$\sqrt{2}$ が有理数ではないということの証明から，振り返って見よう．ここでは，Dedekind による証明を紹介する．そのために，一般に S を $\boldsymbol{Q}$ の空ではない部分集合とするとき，$S^2=\{x\in\boldsymbol{Q}\mid\exists y(y\in S\wedge x=y^2)\}$ とおく．たとえば，$\boldsymbol{N}^2\subset\boldsymbol{N}$，$2\notin\boldsymbol{N}^2$ は容易に確かめられる．ここで，つぎの定理が成り立つ．

定理 4.4　$$\boldsymbol{Q}^2\cap\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^2.$$

証明　$\boldsymbol{N}^2\subset\boldsymbol{Q}^2\cap\boldsymbol{N}$ は明らかだから，1より大きい自然数 a が $\boldsymbol{N}^2$ に含まれなければ，a は $\boldsymbol{Q}^2$ にも含まれないということを示せば十分である．いま，そのような a に対し，$S=\{x\in\boldsymbol{N}\mid x^2>a\}$ とおけば，$S\ni a$ だから $S\neq\phi$．ここで，$n=\min S$ とおけば，$(n-1)^2<a<n^2$ となる ($a\notin\boldsymbol{N}^2$，$a\neq0$ だから，$(n-1)^2\neq a$)．さて，$a\in\boldsymbol{Q}^2$ として矛盾を導こう．$a\in\boldsymbol{Q}^2$ とすれば，$\boldsymbol{N}$ の元 t, u で，$t^2-au^2=0$

となるようなものが存在する．いま，$U=\{u\in \boldsymbol{N}\mid \exists t(t\in \boldsymbol{N}\wedge t^2-au^2=0)\}$ とおけば，仮定によって $U\neq\phi$ だから $u_0=\min U$ が存在する．したがって，$t_0{}^2-au_0{}^2=0$ となるような $\boldsymbol{N}$ の元 t_0 がある．

さて，一般に，x, y を $\bar{\boldsymbol{N}}$ の元とするとき，$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ だから，$x^2>y^2 \Leftrightarrow x>y$ が成り立つ．いま，$(n-1)^2<a$ だから $(n-1)^2u_0{}^2<t_0{}^2$，したがって $(n-1)u_0<t_0$，また $a<n^2$ だから $t_0{}^2<n^2u_0{}^2$，ゆえに $t_0<nu_0=(n-1)u_0+u_0$ が成り立つ．したがって，$u=t_0-(n-1)u_0\in \boldsymbol{N}$，$u<u_0$ となる．ここで，$t=au_0-(n-1)t_0$ とおこう．$a^2u_0{}^2>(n-1)^2t_0{}^2$ だから $t\in \boldsymbol{N}$，しかも計算によって，

$$t^2-au^2=((n-1)^2-a)(t_0{}^2-au_0{}^2)=0$$

となるから，$u\in U$．ところが $u<u_0$ だったからこれは u_0 の最小性に矛盾する．▌

系 $\boldsymbol{Q}$ の元 x で，$x^2=2$ となるものは存在しない．——

有理 Cauchy 列 f で，$(\lim f)^2=\lim f^2=2$ となるようなものが存在することがいえれば，上の系により $\lim f\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ となり，$\boldsymbol{R}\supsetneqq\boldsymbol{Q}$ が証明できる．このことを証明するために，まず一般的な概念を導入しよう．S を $\boldsymbol{R}$ の空ではない部分集合とする．$\boldsymbol{R}$ の元 α が S の**上界** (upper bound)（または**下界** (lower bound)）であるとは，S の任意の元 s に対して $\alpha\geqq s$（または $\alpha\leqq s$）となることを意味するものとする．S が上界（または下界）を持つとき，S は**上**（または**下**）**に有界**であるという．S が上にも下にも有界であるとき，S は**有界** (bounded) であるという．

定理 4.5 S は $\boldsymbol{R}$ の空ではない部分集合で上に有界であるとする．このとき S の上界 s で，S の任意の上界 t に対して，$s\leqq t$ となるようなものが一意的に存在する．（すなわち S の上界の集合は最小値 s をもつ.）

証明 上のような上界 s が存在すれば，その一意性は明らかである．つぎにその存在を示そう．そのため $\alpha\in S$，β を S の上界の一つとする．定理 4.3 からわかるように，有理数 a, b で，$a\leqq\alpha, \beta\leqq b$ となるようなものが存在する．ここで，有理数列 f でつぎの条件 (i), (ii) を満たすものを考える．

(i) $f(0)=a$

(ii) $n\in\omega$ に対して，$f(n)$ が S の上界ならば，$f(n+1)=f(n)-(b-a)/2^n$，
他方，$f(n)$ が S の上界でなければ $f(n+1)=f(n)+(b-a)/2^n$.

上の条件 (i), (ii) によって有理数列 f が一意的に定まることは，定理 2.5 の証明と同様にして示される（読者自ら確かめられたい）．特に $f(1)=b$ は S の上界で

ある．ここで，$n \in \boldsymbol{N}$ について，$|f(n)-f(n+1)|=(b-a)/2^n$ となるから，k を自然数とすると，

$$
\begin{aligned}
&|f(n)-f(n+k)| \\
&\quad = |(f(n)-f(n+1))+(f(n+1)-f(n+2))+\cdots+(f(n+k-1)-f(n+k))| \\
&\quad \leqq (b-a)\sum_{i=n}^{n+k-1} 1/2^i = (b-a)(1/2^n-1/2^{n+k})(1-1/2)^{-1} \\
&\quad = (b-a)(1/2^{n-1}-1/2^{n+k-1}) < (b-a)/2^{n-1},
\end{aligned}
$$

したがって，

$$|f(n)-f(n+k)| < (b-a)/2^{n-1}$$

が成り立つ．定理4.2によって，このことから f が Cauchy 列であることがわかる．$s=\lim f$ とおこう．s は S の上界である．実際，s が S の上界でなければ，S の元 x で $s<x$ となるものがあるから，自然数 m で，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n に対して $f(n)<x$ が成り立つようなものが存在する．いま，そのような自然数 m 全体から成る ω の部分集合を T とし，$m_0=\min T$ とおこう．上に述べたように $f(1)=b$ は S の上界だから，$1<m_0$ である．ゆえに，$m_0-1 \in \omega$．また，m_0 の定義により $f(m_0-1) \geqq x$ となる．$f(m_0-1)-f(m_0)=(b-a)/2^{m_0-1}$ であり，$n \geqq m_0$ となる任意の自然数 n について $f(n+1)=f(n)+(b-a)/2^n$ となるから，$k \in \omega-\{0\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(m_0+k) &= f(m_0)+(b-a)\sum_{i=m_0}^{m_0+k-1} 1/2^i \\
&= f(m_0)+(b-a)/2^{m_0-1}(1-1/2^k)
\end{aligned}
$$

となり，容易にわかるように $\lim f=f(m_0)+(b-a)/2^{m_0-1}=f(m_0-1) \geqq x$ となる．これは，$s=\lim f<x$ という仮定と矛盾する．したがって，s は S の上界となる．さて，t を任意の S の上界としよう．ここで，$s>t$ とすると矛盾が導かれることは，上の議論と全く同様にして示されるから，定理が成り立つ．▌

定理4.5で存在することが示された実数 s を，S の**上限** (supremum) と呼び，$\sup S$ と書く．同様に，T が $\boldsymbol{R}$ の空ではない部分集合で下に有界であるとすれば，$-T=\{x \in \boldsymbol{R} \mid \exists t(t \in T \wedge x=-t)\}$ は上に有界であり，$\sup(-T)$ が存在する．$t=-\sup(-T)$ とおけば，明らかに t は T の下界の集合の最大値となる．このような t は T によって一意的に定まり，T の**下限** (infimum) と呼ばれ，$\inf T$

と書かれる.

$\boldsymbol{R}$ からそれ自身への写像 F が与えられているとしよう. a を実数, $F(a)=b$ とする. ここで, 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ が存在して $|x-a|<\delta$ となる任意の実数 x に対して $|F(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つとき, F は a において**連続** (continuous) であるといい, F が任意の $x \in \boldsymbol{R}$ において連続であれば, F は**連続写像** (continuous mapping) であるという. 特に F として, $F(x)=x$ $(x \in \boldsymbol{R})$ または $F(x)=a$ (a は定められた実数) となるものをとれば, F は明らかに連続写像である. 一方, F として, $F(0)=1$, $F(x)=0$ $(x \in \boldsymbol{R}-\{0\})$ によって定められるものをとれば, F は 0 において連続ではない.

$\boldsymbol{R}$ からそれ自身への写像 F, G に対して, それらの和, 積を, $x \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(F+G)(x) = F(x)+G(x), \qquad (FG)(x) = F(x)G(x)$$

とおくことによって定めよう. もしも, F, G が a において連続ならば, $F+G$, FG も a において連続である. 実際, 正の実数 ε が与えられたとき, 正の実数 δ_1, δ_2 を,

$$|x-a| < \delta_1 \implies |F(x)-F(a)| < \varepsilon$$
$$|x-a| < \delta_2 \implies |G(x)-G(a)| < \varepsilon$$

となるようなものとすれば, $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$ に対して,

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \implies & |(F+G)(x)-(F+G)(a)| \\ & = |(F(x)-F(a))+(G(x)-G(a))| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

となるから, 明らかに $F+G$ は a において連続となる. 一方,

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \implies & |(FG)(x)-(FG)(a)| \\ & = |(F(x)G(x)-F(a)G(x))+(F(a)G(x)-F(a)G(a))| \\ & \leqq |F(x)-F(a)||G(x)|+|F(a)||G(x)-G(a)| \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 正の実数 δ_3 を $|x-a|<\delta_3 \implies |G(x)-G(a)|<1$ が成り立つように選び, $\delta'=\min\{\delta, \delta_3\}$, $A=\max\{|G(a)|+1, |F(a)|\}$ とおけば,

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta' \implies & |(FG)(x)-(FG)(a)| \\ & \leqq A(|F(x)-F(a)|+|G(x)-G(a)|) < 2A\varepsilon \end{aligned}$$

となるから, FG も a において連続になる. したがって, 写像 $H: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を, $x \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$H(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (a_0, \cdots, a_n \in \boldsymbol{R})$$

とおいて定めれば，H は連続である．

定理 4.6　実数 a, b で，$a<b$ となるようなものおよび $\boldsymbol{R}$ からそれ自身への写像 F が与えられ，$a \leqq x \leqq b$ となるような任意の実数 x において F は連続であるとする．いま，$F(a)<F(b)$ とし，実数 α を $F(a)<\alpha<F(b)$ となるようなものとすれば，$a<c<b$ となる実数 c で，$F(c)=\alpha$ となるようなものが存在する．

証明　$S=\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x \leqq b \wedge F(x) \leqq \alpha\}$ とおけば，$S \ni a$ だから $S \neq \phi$．また b は S の上界となるから，$c=\sup S$ が存在する．明らかに $a \leqq c \leqq b$ だから，F は c において連続である．$F(c)=\alpha$ となることを示そう．$F(c)>\alpha$ となれば，$\varepsilon=(F(c)-\alpha)/2$ に対して正の実数 δ $(0<\delta<c-a)$ で，$|x-c|<\delta \Longrightarrow |F(x)-F(c)|<\varepsilon$ が成り立つようなものが存在する．したがって，$|x-c|<\delta$ となるような x に対して $F(x)>\alpha$ となる．このような任意の x は S の上界となる．(実際 $x<s \leqq c$ となる S の元 s があれば $|s-c|<|x-c|<\delta$ だから $F(s)>\alpha$ となり，S の定義に反する.)　ところが，これは c が S の上界の中で最小のものであるということに矛盾する．ゆえに，$F(c)>\alpha$ ではあり得ない．また，もしも，$F(c)<\alpha$ ならば，上と同様に $\varepsilon=(\alpha-F(c))/2$ とおけば，正の実数 δ で，$|x-c|<\delta \Longrightarrow |F(x)-F(c)|<\varepsilon$ が成り立つようなものが存在する(ただし $\delta<b-c$ を満たすように δ をとる)．したがって，$|x-c|<\delta \Longrightarrow F(x)<\alpha$ $(<b)$ が成り立つ．ゆえに，$x=c+\delta/2$ とおけば，$x \in S$ しかも $c<x$ となり，$c=\sup S$ に矛盾する．こうして，$F(c)=\alpha$ となることが示された．▌

系　$a \in \boldsymbol{R}$ $(a>1)$ に対して，$\boldsymbol{R}$ の正の元 α で，$\alpha^2=a$ となるようなものが存在する．

証明　写像 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を，$F(x)=x^2-a$ $(x \in \boldsymbol{R})$ とおいて定めると，$F(0)<0<F(a)$ だから，上の定理により実数 α で，$0<\alpha<a$, $\alpha^2=a$ となるものが存在する．▌

問題 4.4　$n \in N$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a>0$ とすると，$\boldsymbol{R}$ の元 α で $\alpha^n=a$ となるようなものが存在することを示せ．$a<0$ のときはどうか．——

定理 4.4 の系および上の定理 4.6 の系によって，$\boldsymbol{R} \supsetneqq \boldsymbol{Q}$ となることが示された．$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ の元は**無理数** (irrational number) と呼ばれる．

問題 4.5　与えられた実数 a, b に対して，$a<b$ ならば，つぎの (i), (ii) が成り立つことを示せ．

(i) 有理数 c で，$a<c<b$ となるものが存在する

(ii) 無理数 d で，$a<d<b$ となるものが存在する．

[ヒント] $1<\sqrt{2}<2$ を示し，それを用いて a, b がともに有理数のときに (ii) が成り立つことを示し，さらに，一般の実数 a, b については，有理数 a', b' で $a<a'<b'<b$ となるようなものが存在することを (i) を用いて示すとよい．

§4.3 収束数列と Cauchy 列

§4.1 では，有理 Cauchy 列の同値類を考えることによって，$\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{R}$ が構成された．有理数列を考えるかわりに，'実数列' をとって，§4.1 におけるものと同様の操作を行なえば，どのような結果が得られるだろうか．

$\tilde{S}=\boldsymbol{R}^{\omega}$ とおき，その元を**実数列** (sequence of real numbers) と呼ぶ．実数列 f, g の和，積は，$(f+g)(n)=f(n)+g(n)$，$(fg)(n)=f(n)g(n)$ $(n \in \omega)$ とおくことによって定められる．$\tilde{S}$ はこのような和，積に関して単位的可換環となる．実数列 f は，$f[\omega]$ が有界であるとき**有界数列** (bounded sequence) と呼ばれ，$\{x \in \boldsymbol{R} \mid \exists n(n \in \omega \wedge x=|f(n)|)\}$ の上界を f の**絶対上界** (absolute upper bound) と呼ぶ．有界数列全体の成す $\tilde{S}$ の部分集合を $\tilde{B}$ と書けば，有理数列の場合と同様に $\tilde{B}$ は $\tilde{S}$ の部分環を成す．特に，実数列 f で，'十分大きな' n, m に対しては差 $|f(n)-f(m)|$ が 'いくらでも' 小さくなるようなものをとれば，それは有界数列となり，'実 Cauchy 列' と呼ばれる．厳密な定義を述べよう．実数列 f が与えられたとする．このとき，任意の正の実数 ε に対して適当な自然数 m を選び，$n \geqq m$ となる任意の自然数 n について $|f(n)-f(m)|<\varepsilon$ が成り立つようにすることができれば，f は**実 Cauchy 列** (real Cauchy sequence) あるいは単に **Cauchy 列** (Cauchy sequence) と呼ばれる．実 Cauchy 列全体から成る $\tilde{S}$ の部分集合を $\tilde{C}$ と書けば，有理数列の場合と同様にして $\tilde{C}$ は $\tilde{B}$ の部分環となることがわかる．さらに，実数列 f は，任意の正の実数 ε に対して自然数 m を適当に選べば $n \geqq m$ となる任意の自然数 n について $|f(n)|<\varepsilon$ となるときに**実零数列** (null sequence of real numbers) と呼ばれる．実零数列全体から成る $\tilde{S}$ の部分集合を $\tilde{N}$ と書けば，再び §4.1 と同様の論法によって $\tilde{N}$ は $\tilde{C}$ の極大イデアルとなることが示される．実数 a に対して，Cauchy 列 f で，$f(n)=a$ $(n \in \omega)$ となるものを a と同一視すれば，$\boldsymbol{R} \cap \tilde{N}=\{0\}$ で，$\tilde{C}/\tilde{N}$ は $\boldsymbol{R}$ を含む体となる．ところが，実は

$\tilde{C}/\tilde{N}=\boldsymbol{R}$ となることが，つぎのように示される．

実数列 f に対して，実数 a で $f-a\in\tilde{N}$ となるようなものがあれば，$f\in\tilde{C}$ である．このとき，f は**収束数列** (convergent sequence) と呼ばれ，$\lim f=a$ と書く．有理 Cauchy 列は収束数列である．実 Cauchy 列は必ず収束数列となることを示そう．

f を実 Cauchy 列とする．$n\in\omega$ に対して，$\omega-n$ $(=\{m\in\omega\mid m\geqq n\})$ の f による像 $f[\omega-n]$ は有界だからその上限および下限が存在する．実数列 g, h を，$g(n)=\sup f[\omega-n]$，$h(n)=\inf f[\omega-n]$ $(n\in\omega)$ とおいて定めよう．自然数 n, m について，$n\geqq m$ のとき，明らかに

$$h(m)\leqq h(n)\leqq g(n)\leqq g(m) \tag{4.1}$$

が成り立つ．ここで，$(g(m)-h(m))-(g(n)-h(n))=(g(m)-g(n))+(h(n)-h(m))\geqq 0$ だから，

$$g(m)-h(m)\geqq g(n)-h(n)\geqq 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ．

さて，正の実数 ε が与えられたとき，自然数 k を選び，$n\geqq k$ となる任意の自然数 n に対して $|f(n)-f(k)|<\varepsilon$ が成り立つようにすることができる．このとき，明らかに

$$f(k)-\varepsilon\leqq h(k)\leqq g(k)\leqq f(k)+\varepsilon \tag{4.3}$$

であるから，$0\leqq g(k)-h(k)\leqq (f(k)+\varepsilon)-(f(k)-\varepsilon)=2\varepsilon$ となる．したがって，$n\geqq k$ となる任意の自然数 n をとれば，(4.2) により，

$$0\leqq g(n)-h(n)\leqq 2\varepsilon \qquad (n\geqq k) \tag{4.4}$$

が成り立つ．したがって，$g-h\in\tilde{N}$ となる．いま，(4.1) より明らかに g, h は有界数列だから $\inf g[\omega]=\alpha$ および $\sup h[\omega]=\beta$ が存在する．明らかに $h(n)\leqq\beta\leqq\alpha\leqq g(n)$ が任意の自然数 n について成り立つから，$|\alpha-\beta|\leqq|g(n)-h(n)|$，したがって $\alpha-\beta\in\tilde{N}$ となるが，$\tilde{N}\cap\boldsymbol{R}=\{0\}$ だから $\alpha=\beta$ である．一方，$g-h=(g-\alpha)+(\alpha-h)$ だから，自然数 k, n を (4.4) が成り立つようなものとすれば，$0\leqq g(n)-\alpha\leqq 2\varepsilon$ $(n\geqq k)$ が成り立ち，$g-\alpha\in\tilde{N}$ となることがわかる．さらに，任意の自然数 m に対して $h(m)\leqq f(m)\leqq g(m)$ となるから，再び k, n を (4.4) が成り立つようなものとすれば，$g(n)-h(n)=(g(n)-f(n))+(f(n)-h(n))\leqq 2\varepsilon$，したがって $0\leqq g(n)-f(n)\leqq 2\varepsilon$ $(n\geqq k)$，すなわち $g-f\in\tilde{N}$ がいえた．ゆえに，

$f-\alpha=(f-g)+(g-\alpha)\in\tilde{N}$ が示された．したがって，Cauchy 列 f は収束数列であり，$\lim f=\alpha$ となる．こうして，$\tilde{C}$ の任意の元 f は，$\lim f=\alpha\in\boldsymbol{R}$ で代表され，したがって，$\tilde{C}/\tilde{N}=\boldsymbol{R}$ となることが示された．以上の結果をまとめて，つぎの定理が得られる．

定理 4.7 実数列 f が収束数列となるための必要十分条件は，f が Cauchy 列となることである．——

さて，F を $\boldsymbol{R}$ からそれ自身への写像，f を実数列とすれば，$F\circ f$ も実数列となる．特に f として Cauchy 列をとれば $F\circ f$ もまた Cauchy 列となるとき，F を **C 型**であるということにしよう．$\boldsymbol{R}$ からそれ自身への連続写像 F は C 型である．実際このとき f を Cauchy 列，$\alpha=\lim f$ とし，ε を任意の正の実数とすれば，F が連続であるという仮定によって正の実数 δ で，$|x-\alpha|<\delta\Longrightarrow|F(x)-F(\alpha)|<\varepsilon$ となるようなものが存在する．ここで，f が収束数列であることから，自然数 m で，$n\geq m$ となる任意の自然数 n に対して $|f(n)-\alpha|<\delta$ が成り立つようなものが存在する．したがって，このような n に対して，$|F\circ f(n)-F(\alpha)|<\varepsilon$ が成り立つから $F\circ f$ は収束数列となり，したがって，Cauchy 列となる．

F を C 型写像，f を Cauchy 列とすれば，$F(\lim f)=\lim(F\circ f)$ が成り立つ．実際，$\lim f=\alpha$ とし，実数列 g を，

$$g(2n)=f(n),\qquad g(2n+1)=\alpha\qquad(n\in\omega)$$

とおいて定めれば，明らかに g は収束数列で，$\lim g=\alpha$ となる．F が C 型であるという仮定により，$F\circ g$ も Cauchy 列となるが，g の定め方から明らかに $\lim(F\circ g)=\lim(F\circ f)$，また，$\lim(F\circ g)=F(\alpha)$ が成り立つから，$F(\lim f)=F(\alpha)=\lim(F\circ f)$ となる．

C 型写像は連続写像となるだろうか．この問をいい換えれば，写像 $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ がある実数 a において不連続ならば F は C 型にはならないかということになる．問題を簡単にするため，F が 0 において不連続であるとしよう．すると，或る正の実数 ε に対して，正の実数 δ を任意にとったとき，$|x|<\delta$ となる実数 x が存在して，$|F(x)-F(0)|>\varepsilon$ となる．特に，δ として $1/2^n$ をとれば，任意の自然数 n に対して，$S_n=\{x\in\boldsymbol{R}\mid|x|<1/2^n,\ |F(x)-F(0)|>\varepsilon\}\neq\phi$ となる．ここで，任意の自然数 n に対して S_n の元を一つ選び出す何らかの方法が与えられれば，その元を s_n と書き，実数列 f を $f(n)=s_n$ とおいて定めることができる．ここで，

$|s_n|<1/2^n$ だから f は収束数列で，$\lim f=0$ となるが，F が C 型であるという仮定から $F(0)=\lim(F\circ f)$ となるはずである．ところが，S_n の定め方から，任意の自然数 n に対して $|F\circ f(n)-F(0)|>\varepsilon$ となるから，$F(0)=\lim(F\circ f)$ となることは不可能である．こうして，もしも上の S_n の元 s_n を指定する方法が与えられるならば，C 型写像は連続写像であることが示されるのである．しかし，ここで，S_n という $\boldsymbol{R}$ の部分集合が‘具体的’に，‘よくわかるもの’として与えられていない場合には，任意の $n\in\omega$ に対してその一つの元 s_n を指定する方法が存在するか否かも，明らかではなかろう．この問題に肯定的に答えるために，次節で述べる‘選出公理’が用いられる．

§4.4　選出公理

§1.2-§1.4 までに，Zermelo-Fraenkel の集合論の公理 S1)-S7) までについて述べ，それらに基づいて §1.5-§4.3 で自然数，有理数，実数の集合を構成し，それらの集合の基本的な諸性質について述べた．ここで，さらにつぎの公理 S8) を導入する．

S8)　　$\forall a\exists f[f\in(\bigcup a)^a\wedge\forall x(x\in a\wedge x\neq\phi\Longrightarrow f(x)\in x)]$.

‘普通のことば’を用いて S8) を書けば，“任意の集合 a に対して，a から $\bigcup a$ への写像 f が存在し，a の任意の元で空集合とは異なるもの x に対して $f(x)\in x$ となる”という命題になる．S8) は**選出公理**(axiom of choice) と呼ばれ，この公理によって存在を保証される写像 f を，a の**選出写像**あるいは**選出関数**(choice function) と呼ぶ．特に $a=\phi$ ならば $\bigcup a=\phi$ で，$\phi^\phi=\{\phi\}$ だから $f=\phi$ である (問題 2.6 参照)．

排中律の妥当性に関して種々の意見があることについては先に述べたが，この選出公理については，さらに深刻な疑問が出された．実は，終章で説明するように，選出公理が‘正しいか否か’は，Zermelo-Fraenkel の諸公理から選出公理を除いた体系からは，証明することができないのである．それにもかかわらず，選出公理は数学の各分野で用いられており，それによって多くの重要な定理が証明されている．(それらの諸定理が，選出公理を用いずには証明できないかどうかということは，それ自体問題である．また，公理が‘役に立つ’といっても，それをもって公理の妥当性の証しとすることはできない.)

さて，前節で述べたことから，選出公理を仮定すればつぎの定理が成り立つことは，いまや明らかである．

定理 4.8 $\boldsymbol{R}$ からそれ自身への写像 F が連続であることと，F が C 型であることとは同値である．——

選出公理を用いて直ちに得られる結果を，いくつかあげよう．

定理 4.9 I を空集合とは異なる集合，$\{a_i\}_{i\in I}$ を I によって添数づけられた集合で，任意の $i\in I$ に対して $a_i\neq\phi$ であるものとすると，直積 $\prod_{i\in I}a_i$ は空集合ではない．

証明 $A=\{a_i\}_{i\in I}$ とおけば，定義により写像 $f:I\to A$ で $f(i)=a_i$ となるものが存在する(§2.2参照)．F を A の選出写像とすれば，任意の $i\in I$ に対して $a_i\neq\phi$ だから $F(a_i)\in a_i$ となる．ここで $\lambda=F\circ f$ とおけば，λ は I から $\bigcup A=\bigcup_{i\in I}a_i$ への写像で，任意の $i\in I$ について $\lambda(i)=F(a_i)\in a_i$ となるから，$\lambda\in\prod_{i\in I}a_i$ となる．▌

問題 4.6 定理4.9と選出公理は同値であることを証明せよ．［ヒント］集合 a が与えられたとき，$A=\{x\in a\,|\,x\neq\phi\}$ とおき，恒等写像 $1_A:A\to A$ をとれば，$(1_A, A)$ は A 自身によって添数づけられた集合となる．ここで，$A\neq\phi$ のとき $1_A(x)=x$ を x_x と書き，$\prod_{x\in A}x_x$ の元 λ をとれば，λ は A の選出写像となり，したがって選出公理が成り立つことがわかる．

定理 4.10 A を無限集合とすると，A の部分集合 S で ω と対等になるものが存在する．

証明 $\mathcal{P}(A)$ の選出写像を f とする．また，$\tilde{A}=\{X\in\mathcal{P}(A)\,|\,|X|<\infty\}$ とおく．$\tilde{A}\ni\phi$ だから $\tilde{A}\neq\phi$．いま $\tilde{A}$ の元，すなわち A の有限部分集合 X をとれば，$A-X\neq\phi$ だから，$f(A-X)\in A-X$ となる．ここで，$n\in\omega$ に対して $\tilde{A}$ の元 U_n で，$n>m\,(m\in\omega)\Longrightarrow U_n\supsetneqq U_m$ が成り立つようなものが存在することを示そう．そのために写像 $g:\tilde{A}\to\tilde{A}$ を $g(X)=X\cup\{f(A-X)\}$ とおいて定めれば，帰納定理(定理2.5)によって，写像 $F:\omega\to\tilde{A}$ で $F(0)=\phi$, $F(n^+)=g\circ F(n)$ となるようなものが一意的に存在する．$U_n=F(n)$ とおけば，$U_{n+1}=U_{n^+}=U_n\cup\{f(A-U_n)\}\supsetneqq U_n$ だから，明らかに $n>m\Longrightarrow U_n\supsetneqq U_m$ が成り立つ．さて，写像 $h:\omega\to A$ を，$h(n)=f(A-U_n)$ とおいて定めよう．$n>m$ のとき，$h(m)\in U_{m^+}\subset U_n$ だが $h(n)\notin U_n$ だから $h(m)\neq h(n)$ である．したがって，h は単射であり，$h[\omega]=S$ とお

けば，$\omega \approx S$ となる．▮

系　対象 A が無限集合となるための必要十分条件は，A の真部分集合 B で，$A \approx B$ となるものが存在することである．

証明　定理2.4の系により，A が無限集合ならばその真部分集合 B で A と対等になるものが存在することを示せばよい．上の定理によって，A の部分集合 S および全単射 $f: S \to \omega$ が存在する．写像 $F: A \to A$ を，$x \in A - S$ に対しては $F(x) = x$，$x \in S$ に対しては $F(x) = f^{-1}(f(x)^{+})$ とおいて定め，$F(A) = B$ とおけば，明らかに $A \approx B$ だが，$B \not\ni f^{-1}(0)$ だから $A \supsetneqq B$ となり，系が示された．▮

第5章 順序関係

§5.1 順序関係，全順序集合

自然数や実数の性質をしらべるにあたって，数の大小関係が重要な鍵となることは，すでに見て来た．数の大小関係を一般化して，つぎに述べる‘順序関係’の概念が得られる．

集合 a の元の間の関係 f について，つぎの条件

(i) $f \supset \Delta_a$

(ii) $f \cap f^{-1} = \Delta_a$

(iii) $f \circ f \subset f$

が成り立つとき，f を a の元の間の**順序関係** (order relation) と呼び，順序対 (a, f) を**順序集合** (ordered set) と呼んで，a をその**台集合** (support) と呼ぶ．このとき，$x, y \in a$ に対して，$(x, y) \in f$ を，$x \underset{f}{\prec} y$ (または $y \underset{f}{\succ} x$)，または f を略して，$x \prec y$ (または $y \succ x$) と書く．この記法によれば，上の条件 (i), (ii), (iii) はそれぞれつぎの (i)′, (ii)′, (iii)′ のように書ける．

(i)′ $\forall x(x \in a \Longrightarrow x \prec x)$ (反射律)

(ii)′ $x \prec y \wedge y \prec x \Longleftrightarrow x = y$ (反対称律)

(iii)′ $x \prec y \wedge y \prec z \Longrightarrow x \prec z$ (推移律).

上の (i), (ii), (iii) あるいは (i)′, (ii)′, (iii)′ は**順序の公理** (axiom of order) と呼ばれる．

$a = \omega$，$f = \{(x, y) \in a \times a \mid x \leqq y\}$ とすれば，自然数 x, y に対して $x \underset{f}{\prec} y \Longleftrightarrow x \leqq y$ が成り立ち，f は順序関係となる．この関係 f が自然数の間の**大小関係**である．整数，有理数，実数の間の大小関係も，同様に定義される．他方，$a = \bar{N}$ $(=\omega)$，$g = \{(x, y) \in \bar{N} \times \bar{N} \mid x \mid y\}$ とおけば，g は明らかに順序関係となる．この g は，**整除関係** (divisibility relation) と呼ばれる．自然数の間の大小関係の場合には，任意の自然数 x, y についてそれらを‘比較’することができる．すなわち，$x \leqq y$ または $y \leqq x$ のどちらかが成り立つ．しかし，整除関係 g について

は，事情が異なる．たとえば，2,3 をとると，$2 \underset{g}{<} 3$ も $3 \underset{g}{<} 2$ も成り立たない．

一般に順序集合 $(a, <)$ が与えられたとき，$a \times a$ の任意の元 (x, y) に対して $x<y \vee y<x$ が成り立てば，$<$ は**全順序** (total order) または**線型順序** (linear order) と呼ばれ，$(a, <)$ は**全順序集合**または**線型順序集合**と呼ばれる．$(\omega, \leqq)$ は全順序集合だが，(ω, g) はそうではない．

一般に集合 a が与えられたとき，$\mathcal{P}(a)$ の元の間の関係 f を，$f=\{(x, y) \in \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a) \mid x \subset y\}$ によって定めれば，f は明らかに順序関係となる．この f を $\mathcal{P}(a)$ の元の間の**包含関係** (inclusion relation) と呼び，$\subset$ とも表わす．

問題 5.1　順序集合 $(\mathcal{P}(a), \subset)$ が全順序集合になるための必要十分条件は a が空集合またはシングルトンとなることであることを示せ．

例 5.1　順序集合 $(a, f), (b, g)$ が与えられたとき，$a \times b$ の元の間の関係 $<$ を

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \underset{f}{<} x_2 \vee (x_1=x_2 \wedge y_1 \underset{g}{<} y_2)$$

$$((x_i, y_i) \in a \times b,\ \ i=1, 2)$$

が成り立つようなものとすれば，$(a \times b, <)$ は順序集合となる．$<$ は f, g によって定まる $a \times b$ の元の間の**辞書式順序関係** (lexicographic order) と呼ばれる．

――

$(a, <)$ を順序集合，$x, y \in a$ に対して，$x<y \wedge x \neq y$ のとき $x \lneqq y$ と書くことにする．ここで $x \in a$ に対して，a の部分集合で x の**下切片** (lower segment) あるいは単に**切片** (segment) と呼ばれるものを

$$s(x) = \{y \in a \mid y \lneqq x\}$$

とおいて定める．$\bar{s}(x)=s(x) \cup \{x\}$ とおき，これを x の**弱い意味での下切片**と呼ぶ．さらに，x の**上切片** (upper segment) を

$$s'(x) = \{y \in a \mid x \lneqq y\}$$

によって定める．また $\bar{s}'(x)=s'(x) \cup \{x\}$ とおき，これを x の**弱い意味での上切片**と呼ぶ．$s(x)=\phi$ のとき x は (a において) **極小** (minimal)，$s'(x)=\phi$ のとき x は**極大** (maximal) であるという．

例 5.2　順序集合 $(\boldsymbol{R}, \leqq)$ において，$\boldsymbol{R}$ は極小元も極大元も持たない．$(\bar{\boldsymbol{N}}, \leqq)$ において，$\bar{\boldsymbol{N}}$ は極大元を持たないが，0 はただ一つの極小元となる．また $(\bar{\boldsymbol{N}}, g)$ (ただし，g は，整除関係) をとると，1 は $\bar{\boldsymbol{N}}$ のただ一つの極小元となり，0 は $\bar{\boldsymbol{N}}$

のただ一つの極大元となる．さらに，$(\boldsymbol{N}-\{1\}, g)$ (g は上と同様に整除関係) においては，極大元は存在せず，$x \in \boldsymbol{N}-\{1\}$ が極小元であることと x が素数であることは同値となる．

一般に $(a, \prec)$ を順序集合，$S \subset a$ とするとき，S の**上界集合** (upper bound set) を

$$\text{u. b.}(S) = \{x \in a \mid \forall s(s \in S \Longrightarrow s \prec x)\}$$

によって定め，S の**下界集合** (lower bound set) を

$$\text{l. b.}(S) = \{x \in a \mid \forall s(s \in S \Longrightarrow x \prec s)\}$$

によって定める．u. b. $(S) \neq \phi$ のとき S は**上に有界**といい，u. b. (S) の元を S の**上界** (upper bound) と呼ぶ．他方 l. b. $(S) \neq \phi$ のとき S は**下に有界**であるといい，l. b. (S) の元を S の**下界**と呼ぶ．S は上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．$S \neq \phi$ のとき，明らかに，

$$\text{u. b.}(S) = \bigcap_{s \in S} \bar{s}'(s), \qquad \text{l. b.}(S) = \bigcap_{s \in S} \bar{s}(s)$$

が成り立つ．

上で，S の元 s で，$\forall t(t \in S \Longrightarrow t \prec s)$ が成り立つようなものがあればそのような s は一意的に定まり，それを S の ($\prec$ に関する) **最大元** (maximum) と呼んで $\max S$ と書く．(もしも，s' も条件 $\forall t(t \in S \Longrightarrow t \prec s')$ を満たせば，$s \prec s'$, $s' \prec s$ がともに成り立つから，$s = s'$ となり，$\max S$ は一意的に定まる．) 同様に，S の元 s について $\forall t(t \in S \Longrightarrow s \prec t)$ が成り立つとき，s は一意的に定まり，それを S の ($\prec$ に関する) **最小元** (minimum) と呼び，$\min S$ と書く．max l. b. (S) が存在するとき，それを S の**下限** (infimum) と呼んで $\inf S$ と書き，min u. b. (S) が存在するとき，それを S の**上限** (supremum) と呼んで $\sup S$ と書く．

例 5.3 $(\mathcal{P}(a), \subset)$ において，$S \subset \mathcal{P}(a)$ とすれば，a は S の上界，ϕ は S の下界である．また，$\bigcup S = \sup S$. $S \neq \phi$ のときは，$\bigcap S = \inf S$ となる．特に $S = \{x, y\}$，$x \supset y$ のとき $\sup S = \max S = x$，$\inf S = \min S = y$ となるが，$x \supset y$ も $y \supset x$ も成り立たなければ，$\max S$, $\min S$ は存在しない．

例 5.4 $(\boldsymbol{N}, g)$ (ただし，g は整除関係) において，$S = \{2, 3\}$ とすれば，$\sup S = 6$，$\inf S = 1$ だが，S は最大元も最小元も持たない．

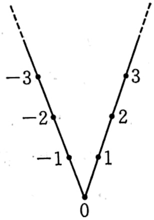
例 5.5 $\boldsymbol{Z}$ の元の間の関係 f を，

$$f=\{(x,y)\in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\mid xy\geqq 0\wedge x^2\leqq y^2\}$$

によって定め，$\underset{f}{<}$ を $<$ と書けば，$x, y\in\boldsymbol{Z}$ について

$$x<y \iff (x\geqq 0\wedge y\geqq 0\wedge x\leqq y)\vee(x\leqq 0\wedge y\leqq 0\wedge y\leqq x)$$

が成り立つ(図参照).



$<$ は順序関係であるが，$1<-1$ も $-1<1$ も成り立たないので，全順序関係ではない．$S=\{0,1,-1\}$ としよう．$\inf S=\min S=0$，また，S は上界 $2,-2,\cdots$ を持つが，上限は持たない．また，$T=\{2,-2\}$ とすれば，T は有界だが上限も下限も，また最大元も最小元も持たない．——

$(a,<)$ を順序集合，$b\subset a$ とすると，$<$ を $b\times b$ に制限したものはやはり順序関係となる．簡単のため後者をも $<$ で表わせば，$(b,<)$ は順序集合となる．このとき，単に b を a の‘部分順序集合’ともいい，特に $(b,<)$ が全順序集合のとき b を a の**全順序部分集合**または a に含まれる**鎖** (chain) と呼ぶ．$(\mathcal{P}(a),\subset)$ においては，B を $\mathcal{P}(a)$ に含まれる鎖とすれば，$B\subset\mathcal{P}(a)$ で，B に含まれる任意の元 b, c の間に，$b\subset c\vee c\subset b$ が成り立つ．ここで $\bigcup B=\sup B$ である．このように，$\mathcal{P}(a)$ に含まれる任意の鎖は‘上からおさえられている’．$(\boldsymbol{R},\leqq)$ においては，$\boldsymbol{R}$ に含まれる鎖として $\boldsymbol{R}$ 自身または $\boldsymbol{Z}$ などをとることができるが，それらは上界を持たない．

§5.2 Zorn の補題

順序集合 $(a,<)$ において，a に含まれる任意の鎖が上界を持つとき，$(a,<)$ を**帰納的順序集合** (inductive ordered set) と呼ぶ．このとき a に含まれる鎖として ϕ をとることができ，仮定によって a の元で ϕ の上界となるものがあるから，$(a,<)$ が帰納的順序集合ならば，a は空集合ではない．前節で見たように，

a を任意の集合とするとき，$(\mathcal{P}(a), \subset)$ は帰納的であり，$(\boldsymbol{R}, \leqq)$ は帰納的ではない．また R を単位的環，A を R のイデアルで R とは異なるもの全体から成る集合とすれば，$(A, \subset)$ は帰納的順序集合となる．実際，C を A に含まれる鎖とし，$I=\bigcup C$ とすれば，I は明らかに R のイデアルだが，R の単位元は含まないから $I\in A$，さらに $I=\sup C$ である．§3.3 で定義された R の極大イデアルとは，A の $\subset$ に関する極大元に他ならない．R はつねに極大イデアルを持つだろうか．より一般に，帰納的順序集合は極大元を持つだろうか．選出公理を用いれば，この答は肯定的である．すなわちつぎの定理が成り立つ．

定理 5.1 (Zorn の補題)　$(a, \prec)$ を帰納的順序集合，$\alpha\in a$ とすれば，a の極大元 β で $\alpha\prec\beta$ となるものが存在する．——

この定理が成り立つことは，一見明らかであるようにも思える．つまり，α が極大元ではなければ，$\alpha\lneqq y$ となるような a の元 y をとり，y がまた極大元ではなければ，$y\lneqq z$ となるような a の元 z をとり，同様の操作を続けて a に含まれる鎖 C をつくる．ここで，C は上界 u を持つが，u が a の極大元でなければ，また $u\lneqq v\lneqq w\lneqq\cdots$ という鎖をつくる．このような操作を‘どこまでも’続ければ，a に含まれる任意の鎖が上界を持つという条件から，‘いつか’は極大元にたどりつくのではないだろうか．Zermelo の整列可能定理(後の定理 5.4)の証明のアイディアに基づいてこのような考え方を厳密化した Zorn の補題の証明が，Halmos の Naive Set Theory に出ているので，それを以下に紹介しよう．そのためにまずつぎの補題を証明する．

補題 5.1　$(A, \prec)$ を順序集合，$S\subset\mathcal{P}(A)$ で，S の任意の元は A の鎖，しかも S は $(\mathcal{P}(A), \subset)$ において，$\mathcal{P}(A)$ の鎖となっているものとすれば，$\bigcup S$ は A の鎖となる．

証明　$x, y\in\bigcup S$ ならば，$x\prec y \vee y\prec x$ が成り立つことを示せばよい．C, D を S に含まれる A の鎖で，$x\in C$, $y\in D$ となるものとしよう．S は $\subset$ に関して鎖となるから，$C\subset D \vee D\subset C$ が成り立つ．もし $C\subset D$ ならば $x, y\in D$ で，D は A の鎖だから $x\prec y\vee y\prec x$ が成り立つ．$D\subset C$ のときも同様だから，$\bigcup S$ は A の鎖となる．▌

定理 5.1 の証明　$\mathcal{C}=\{C\in\mathcal{P}(a) \mid \alpha\in C\wedge C$ は a の鎖$\}$ とする．$\{\alpha\}\in\mathcal{C}$ である．定理の仮定によって，$\mathcal{C}$ の任意の元 C に対して u. b. $(C)\neq\phi$ となる．もしも

u. b. $(C)-C=\phi$ となるような $C\in\mathscr{C}$ があれば，定理は成り立つ．実際，このとき $\beta\in$ u. b. (C) とすれば，u. b. $(C)\subset C$ から $\beta\in C$，ゆえに $\beta=\max C$, $\alpha<\beta$ である．しかもこのとき，$\beta<\gamma$ となるような a の元 γ があれば，$\gamma\in$ u. b. (C) だから上と同様に $\gamma=\max C=\beta$ となり，β は a の極大元となる．そこでいま，$\mathscr{C}$ の任意の元 C に対して u. b. $(C)-C\neq\phi$ と仮定して矛盾を導くことにしよう．いま，

$$\mathscr{D}=\{D\in\mathcal{P}(a)\,|\,\exists C(C\in\mathscr{C}\wedge D=\text{u. b. }(C)-C)\}$$

とおき，f を $\mathscr{D}$ の選出写像としよう．$C\in\mathscr{C}$ について，$C\cup f(\text{u. b. }(C)-C)$ は明らかにまた $\mathscr{C}$ の元となるから，写像 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ を，$F(C)=C\cup\{f(\text{u. b. }(C)-C)\}$ とおいて定めることができる．こうして，$\mathscr{C}$ の任意の元 C は，F によって一つの元だけ‘上へ伸ばされる’．ところがつぎに述べるような方法によって，$\mathscr{C}$ の元 C_0 で，F によっては‘それ以上伸ばされない’ようなもの，すなわち $C_0=F(C_0)$ となるものが存在することが示される．他方，$F(C_0)=C_0\cup\{f(\text{u. b. }(C_0)-C_0)\}\supsetneqq C_0$ だから，矛盾が導かれることとなる．このような C_0 を見出すために，まず網を大きく広げてつぎに述べる‘α を含む塔’なるものをとらえ，その中の‘最小’のものを用いて定理を証明する．

$\mathscr{T}\subset\mathscr{C}$ は，つぎの条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき，‘α を含む塔’と呼ばれる．

(ｉ)　$\{\alpha\}\in\mathscr{T}$

(ii)　$C\in\mathscr{T}\Longrightarrow F(C)\in\mathscr{T}$

(iii)　$\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$ かつ $\mathscr{S}$ は $\mathcal{P}(\mathscr{C})$ の包含関係に関して鎖をなすならば，$\bigcup\mathscr{S}\in\mathscr{T}$.

((iii) において，$\bigcup\mathscr{S}$ は α を含む a の鎖となる (補題 5. 1).)

α を含む塔としては，たとえば $\mathscr{C}$ 自身がある．$\tilde{\mathscr{T}}$ を $\mathcal{P}(\mathscr{C})$ の部分集合で，α を含む塔全体から成るものとしよう．$\tilde{\mathscr{T}}\ni\mathscr{C}$ だから $\tilde{\mathscr{T}}\neq\phi$. ここで，$\mathscr{T}_0=\bigcap\tilde{\mathscr{T}}$ とおけば，$\mathscr{T}_0$ は α を含む塔の中で明らかに‘最小’のものとなる．ここで，$C_0=\bigcup\mathscr{T}_0$ とおくと，$\mathscr{T}_0$ が上の条件 (ii) を満たすから $F(C_0)=C_0$ となる．ところが，C_0 は $\mathscr{C}$ に含まれることがいえ，こうして上述の矛盾が導かれるのである．C_0 が $\mathscr{C}$ の元となることを示すためには，塔の条件 (iii) から $\mathscr{T}_0$ が $\mathcal{P}(\mathscr{C})$ の包含関係に関して鎖をなすことをいえば十分である (補題 5. 1)．ここで，

$$\mathscr{S}=\{C\in\mathscr{T}_0\,|\,\forall X(X\in\mathscr{T}_0\Longrightarrow C\subset X\vee X\subset C)\}$$

とおく．すなわち $\mathscr{S}$ は $\mathscr{T}_0$ の部分集合で，$\mathscr{T}_0$ の任意の元 X と‘比較可能’なよ

うな元 C 全体から成るものである．証明すべきことは $\mathcal{S}=\mathcal{T}_0$ が成り立つことである．$\mathcal{S}\subset\mathcal{T}_0$ だから，$\mathcal{T}_0\subset\mathcal{S}$ を示せばよいが，そのためには $\mathcal{S}$ が α を含む塔となることをいえばよい ($\mathcal{T}_0$ はそのような塔の中で‘最小’のものだからである)．$\mathcal{S}$ が塔の条件 (i), (iii) を満たすことは容易にわかる．$\mathcal{S}$ が条件 (ii) を満たすことをいうためには，$C\in\mathcal{S}$ とするとき，$F(C)$ が $\mathcal{T}_0$ の任意の元と‘比較可能’であることを示せばよい．そのために，$\mathcal{S}$ の元 C に対して，

$$\mathcal{T}_C = \{X\in\mathcal{T}_0 \mid X\subset C \vee F(C)\subset X\}$$

とおき，$\mathcal{T}_C=\mathcal{T}_0$ となることをいえばよい (実際 $X\subset C \Longrightarrow X\subset F(C)$ だから，$\mathcal{T}_C=\mathcal{T}_0$ ならば $F(C)\in\mathcal{S}$ となる)．ここで再び $\mathcal{T}_0$ の最小性を用い，$\mathcal{T}_C$ が α を含む塔となることを示せば，$\mathcal{T}_0=\mathcal{T}_C$ が示される．$\mathcal{T}_C\ni\{\alpha\}$ および $\mathcal{T}_C$ が (iii) を満たすことは容易に確かめられる．$\mathcal{T}_C$ が (ii) を満たすことを示せば証明が完了する．いま，$X\in\mathcal{T}_C$ としよう．$\mathcal{T}_C$ の定義により $X\subset C\vee F(C)\subset X$ となるが，もしも $F(C)\subset X$ ならば $X\subset F(X)$ だから $F(C)\subset F(X)$ となり，$F(X)\in\mathcal{T}_C$ となるから，$X\subset C$ の場合について考えればよい．さて，$X\in\mathcal{T}_0$ だから $F(X)\in\mathcal{T}_0$，また $C\in\mathcal{S}$ だから $F(X)\subset C\vee C\subset F(X)$ となる．ここで $F(X)\subset C$ ならば $F(X)\in\mathcal{T}_C$ だから，$C\subset F(X)$ の場合について考えよう．したがって，いま $X\subset C\subset F(X)$ となるが，$F(X)=X\cup\{f(\text{u. b.}(X)-X)\}$ で，$F(X)$ は X にシングルトンを合併させたものだから，$X=C\vee C=F(X)$ が成り立つ．$X=C\Longrightarrow F(X)=F(C)\Longrightarrow F(X)\in\mathcal{T}_C$，$C=F(X)\Longrightarrow F(X)\in\mathcal{T}_C$ がともに成り立つから，どの場合にも $F(X)\in\mathcal{T}_C$ となり，$\mathcal{T}_C$ が (ii) を満たすことが示された．▌

Zorn の補題を用いれば，この節の初めの部分で述べたように，単位的環 R とそのイデアル A で R とは異なるものが与えられたとき，A を含む R の極大イデアルが存在することがわかる．この例からも見られるように，Zorn の補題は数学の各分野で用いられる重要な定理の一つである．Zorn の補題の証明には，選出公理が用いられた．選出公理が成り立たなければ，Zorn の補題も成り立たないだろうか．答は‘その通り’であることが，つぎの定理から知られる．

定理 5.2 選出公理と Zorn の補題は同値である．

証明 Zorn の補題から選出公理が導かれることを示せば十分である．a を空でない集合とし，a の選出写像が存在することを示そう．$\mathcal{F}$ を a の部分集合の選出写像全体から成る集合とする．厳密には，$s\subset a$ のとき，s の選出写像 f は

$s\times\bigcup s$ の部分集合で，$(\bigcup s)^s$ に含まれ，s の任意の元 $\sigma(\neq\phi)$ に対して $f(\sigma)\in\sigma$ を満たすようなものであるから，$f\subset s\times\bigcup s\subset a\times\bigcup a$ で，

$$\mathcal{F}=\{f\in\mathcal{P}(a\times\bigcup a)\mid\exists s(s\subset a\wedge f\text{ は }s\text{ の選出写像})\}$$

となる．$a\times\bigcup a$ から a への標準的射影を π と書こう．($(\alpha,x)\in a\times\bigcup a$ に対して，$\pi(\alpha,x)=\alpha$.) f,g を $\mathcal{F}$ の元とするとき，

$$f\subset g\iff\pi(f)\subset\pi(g)\wedge f=g|_{\pi(f)}$$

となる．F を $\mathcal{F}$ の $\subset$ に関する鎖とすれば，$\sup F=\bigcup F$ だから，$(\mathcal{F},\subset)$ は帰納的順序集合である．f を $\mathcal{F}$ の極大元としよう．$a-\pi(f)$ が空集合以外の元を含まないならば証明が完了する．$a-\pi(f)\ni\alpha$, $\alpha\neq\phi$ として矛盾を導こう．$x\in\alpha$ とし，$g=f\cup(\{\alpha\}\times\{x\})$ とおけば，$g\in\mathcal{F}$．しかも $f\subsetneqq g$ となるから，これは f が $\mathcal{F}$ の極大元であるということに矛盾する．▌

§5.3 整列集合

自然数全体の集合 ω の重要な性質の一つとして，ω の任意の空ではない部分集合が最小元を持つというものがあり，このことを用いていろいろな事柄が導かれた．一般に順序集合 $(a,\prec)$ において，s を a の任意の空ではない部分集合とするときに $\min s$ が存在すれば，$(a,\prec)$ または a を**整列集合** (well-ordered set) という．$(\omega,\leqq)$ は典型的な整列集合の例である．$(a,\prec)$ が整列集合ならば，これは全順序集合である．実際 $x,y\in a$ のとき $\min\{x,y\}=x$ とすれば，$x\prec y$ となる！ $(\boldsymbol{Z},\leqq)$ は全順序集合だが，整列集合ではない．$\min\boldsymbol{Z}$ は存在しないからである．自然数に関する命題については，数学的帰納法 (定理 1.8) が成り立ったが，整列集合の元に関する命題については，つぎの定理が成り立つ．

定理 5.3 (超限帰納法) $(a,\prec)$ を整列集合，$P(x)$ を a の任意の元 x を自由変数とする命題とする．ここで，a の任意の元 x に対し

$$\forall y(y\in s(x)\Longrightarrow P(y))\Longrightarrow P(x)$$

という命題が成り立つならば，a の任意の元 x に対して $P(x)$ が成り立つ．($s(x)=\{z\in a\mid z\precneqq x\}$ である．§5.1 参照.)

証明 a の元 x で，$P(x)$ が成り立たないものがあるとし，$s=\{x\in a\mid\neg P(x)\}$ とおこう．仮定により $s\neq\phi$ だから，$y=\min s$ が存在する．ところが，a の元 z で $z\precneqq y$ となるものがあれば，$z\notin s$．ゆえに $P(z)$ は成り立つ．したがって $\forall z($

$\in s(y) \Longrightarrow P(z)$) という命題が成り立つ．($y=\min a$ となる場合には，任意の z に対して命題 $z\in s(y)$ は成り立たないので，$z\in s(y) \Longrightarrow P(z)$ という命題は成り立つ(§1.1参照))．ゆえに，仮定によって $P(y)$ が成り立たなければならないが，これは $y\in s$ に矛盾する．▌

さて，$(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ が整列集合ではないことは上に述べたが，$\boldsymbol{Z}$ の元の間の順序を‘適当につけ変えて’，$\boldsymbol{Z}$ を整列集合とすることができる．$\boldsymbol{Z}$ の部分集合 $\bar{\boldsymbol{N}}$ は大小関係に関して整列集合になるから，$\bar{\boldsymbol{N}}$ を‘引き伸ばす’ことを考える．たとえば，$\bar{\boldsymbol{N}}\cup\{-1\}$ の元の間の順序関係 $\prec$ として，$\bar{\boldsymbol{N}}$ の元 x, y に関してはふつうの大小関係，$x\in\bar{\boldsymbol{N}}$ のとき $x\prec-1$，$-1\prec-1$ となるようなものをとる．すると，$(\bar{\boldsymbol{N}}\cup\{-1\}, \prec)$ は整列集合となる．こうして，$\bar{\boldsymbol{N}}\cup\{-1,-2\}$, $\bar{\boldsymbol{N}}\cup\{-1,-2,-3\}$ 等を次々と整列集合にして，‘最後には’$\boldsymbol{Z}$ 自身を整列集合とするような順序関係 $\prec$ をとることができる．(正確には，$x, y\in\boldsymbol{Z}$ に対し，$x\prec y \Longleftrightarrow (x, y\in\bar{\boldsymbol{N}}\wedge x \leqq y) \vee (x\in\bar{\boldsymbol{N}}\wedge y<0) \vee (x, y<0\wedge y\leqq x)$ が成り立つように関係 $\prec$ を定めれば，$(\boldsymbol{Z}, \prec)$ は整列集合になる．) さらに一般につぎの定理が成り立つ．

定理 5.4(整列可能定理) 集合 a に対し，その元の間の順序関係 $\prec$ で $(a, \prec)$ が整列集合となるようなものが存在する．

証明 $s\subset a$，f を s の元の間の順序関係で (s, f) が整列集合となるようなものとしよう．(このようなものとしては，たとえば (ϕ, ϕ) がある．) このような (s, f) 全体のなす集合を A と表わそう．(厳密には，$A=\{(s, f)\in\mathcal{P}(a)\times\mathcal{P}(a\times a) \mid f\subset s\times s\wedge(s, f)$ は整列集合$\}$ となる．) A の元 $(s, f), (t, g)$ に対して，t の元 x を適当に選べば $s=\{y\in t \mid y\underset{g}{\prec}x\}$，すなわち s は t の中での，g に関する x の弱い意味での下切片と一致し，しかも $f=g\cap(s\times s)$ となるならば，$(s, f)\leqq(t, g)$ と書くことにする．(このとき，整列集合 (t, g) は整列集合 (s, f) を‘引き伸ばしたもの’とみなされる．) $\leqq$ は明らかに A の元の間の順序関係を定める．C を A の $\leqq$ に関する鎖としよう．ここで，$u=\bigcup_{(s,f)\in C} s$，$h=\bigcup_{(s,f)\in C} f$ とおけば，容易に確かめられるように，(u, h) はまた A の元となり，しかも $(u, h)=\sup C$ となる．A は，したがって帰納的順序集合となるから，極大元 $(\tilde{s}, \tilde{f})$ を含む．ここで $\tilde{s}=a$ となることを示せば証明が完了する．$a-\tilde{s}\ni x$ となるような元 x が存在するとして矛盾を導こう．$\tilde{t}=\tilde{s}\cup\{x\}$ とおき，$\tilde{g}=\tilde{f}\cup(\tilde{t}\times\{x\})$ とおけば，x は $\tilde{t}$ の $\tilde{g}$ に関する最大元となり，$(\tilde{t}, \tilde{g})\in A$ しかも $(\tilde{s}, \tilde{f})\leqq(\tilde{t}, \tilde{g})$, $(\tilde{s}, \tilde{f})\neq(\tilde{t}, \tilde{g})$ が成り立つ．

これは，$(\tilde{s}, \tilde{f})$ が A の極大元であるということに矛盾する．▌

定理 5.5 整列可能定理と選出公理は同値である．

証明 上の定理の証明から見られるように，‘Zorn の補題 $\Longrightarrow$ 整列可能定理’が成り立つ．Zorn の補題は選出公理と同値であるから，‘整列可能定理 $\Longrightarrow$ 選出公理’が成り立つことを示せばよい．そのために，a を集合とし，$\bigcup a$ の元の間の順序関係 $<$ を，$(\bigcup a, <)$ が整列集合となるようにとる．$x \in a$ のとき，$x \subset \bigcup a$ だから，x は $< \cap (x \times x)$ すなわち $<$ を $x \times x$ に制限することによって得られる関係に関して整列集合となり，$x \neq \phi$ ならばその最小元 $\min x$ が存在する．ここで，

$$f = \{(x, y) \in a \times \bigcup a \mid x \neq \phi \wedge y = \min x\}$$

とおけば，明らかに f は a の選出写像である．▌

問題 5.2 (a, f) を順序集合とすれば，a の元の間の全順序関係 g で，$f \subset g$ となるようなものが存在することを示せ．

問題 5.3 (a, f) を全順序集合，g を a の元の間の順序関係で，$f \subset g$ しかも (a, g) が整列集合となるようなものとすれば，(a, f) も整列集合となることを示せ．

§5.4 順序同型写像

順序集合 (a, f), (b, g) および写像 $F: a \to b$ が与えられたとしよう．a の任意の元 x, y について，

$$x \underset{f}{<} y \Longrightarrow F(x) \underset{g}{<} F(y)$$

が成り立つとき，F を**順序を保つ写像** (order preserving mapping) あるいは (f, g に関する) **単調写像** (monotonous mapping) と呼ぶ．単調写像 F は，さらに a から b への単射であれば**順序同型写像** (order isomorphism) と呼ばれ，このとき，もしも F が a から b への全単射であれば F は a から b の**上への**順序同型写像といい，またこのとき (a, f) と (b, g) (または a と b) は**順序同型** (order isomorphic) であるといって，$(a, f) \simeq (b, g)$ (または $a \simeq b$) と書く．特に，1_a は a からそれ自身の上への順序同型写像である．

写像 $F: \bar{N} \to \bar{N}$ を，$F(x) = nx$ (n は N の元，$x \in \bar{N}$) によって定められるもの

とすれば，F は $(\bar{N}, \leqq)$ からそれ自身への順序同型写像となる．$n\bar{N}=F(\bar{N})$ と書けば，$\bar{N}\simeq n\bar{N}$ が成り立つ．一方，写像 $G: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$ を，$G(x)=x^2$ $(x\in\boldsymbol{Z})$ によって定めれば，G は単調写像ではない．

一般に，(a_i, f_i) $(i=1,2,3)$ を順序集合，$F: a_1\to a_2$, $G: a_2\to a_3$ をそれぞれ単調写像とすれば，合成写像 $G\circ F$ は a_1 から a_3 への単調写像となる．ここで，F, G がともに順序同型写像ならば，$G\circ F$ もまた順序同型写像となる．ところが，F が a_1 から a_2 の上への順序同型写像であるとき，逆写像 $F^{-1}: a_2\to a_1$ は順序同型写像となるとは限らない．実際，

$$(a_1, f_1) = (\boldsymbol{N}, g) \qquad (g \text{ は整除関係})$$
$$(a_2, f_2) = (\boldsymbol{N}, \leqq)$$
$$F = 1_{\boldsymbol{N}}$$

とすれば，F は a_1 から a_2 の上への順序同型写像となるが，F^{-1} は単調写像ではない．

問題 5.4　$(a_1, f_1), (a_2, f_2)$ がともに全順序集合で，$F: a_1\to a_2$ が全単射で順序を保つものとすれば，F^{-1} は a_2 から a_1 の上への順序同型写像となることを証明せよ．——

上に述べたこと(および問題 5.4)から，$(a, f), (b, g), (c, h)$ を全順序集合とするとき，つぎの事柄が成り立つことは明らかである．

$$(a, f) \simeq (a, f)$$
$$(a, f) \simeq (b, g) \iff (b, g) \simeq (a, f)$$
$$(a, f) \simeq (b, g) \wedge (b, g) \simeq (c, h) \implies (a, f) \simeq (c, h).$$

問題 5.5　ω からそれ自身の上への全単射で，大小関係 $\leqq$ を保つものは恒等写像 1_ω に限ることを示せ．——

順序集合 (a, f) が与えられたとき，a からそれ自身の上への全単射で f を保つもの全体からなる集合を $\mathrm{Aut}(a, f)$ と書くことにしよう．$\mathrm{Aut}(a, f)$ は，写像の合成を算法とする半群をなす．$\mathrm{Aut}(a, f)$ を，(a, f) の**順序同型半群**と呼ぼう．(a, f) が全順序集合のときは $\mathrm{Aut}(a, f)$ は写像の合成を算法とする群をなし，(a, f) の**順序同型群**と呼ばれる．

問題 5.6　(i)　$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ を決定せよ．

(ii)　$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}, \leqq)$ の元 F が加法に関する同型写像ならば $F(x)=cx$ $(c>0)$ を示せ．

(iii)　$F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ で，$F(x)=x^3$ $(x \in \boldsymbol{R})$ によって定められるものは，$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{R}, \leqq)$ の元となることを示せ．

定理 5.6　$(a, \prec)$ を整列集合，$F: a \to a$ を順序同型写像とすると，a の任意の元 x について，$x \prec F(x)$ が成り立つ．

証明　a の元 x で，$F(x) \lneqq x$ となるようなものが存在するとして矛盾を導こう．$s=\{x \in a \mid F(x) \lneqq x\} \neq \phi$ とするのだから，$\alpha = \min s \in a$ となる．$\alpha \in s$ より $F(\alpha) \lneqq \alpha$，ゆえに $F(\alpha) \notin s$，ところが，F が順序同型写像であることから，$F(F(\alpha)) \lneqq F(\alpha)$ となり，これは $F(\alpha) \in s$ を意味する．これは矛盾である．▌

系 1　$(a, \prec)$ を整列集合とすると，$\mathrm{Aut}(a, \prec) = \{1_a\}$．

証明　$a=\phi$ のときには，系が成り立つことは明らかだから，$a \neq \phi$ の場合について考えよう．$F \in \mathrm{Aut}(a, \prec)$，$x \in a$ とすれば，上の定理により $x \prec F(x)$ である．$F^{-1} \in \mathrm{Aut}(a, \prec)$ だから，$F^{-1}(x) \prec F^{-1}(F(x)) = x$，また，上の定理により $x \prec F^{-1}(x)$ である．したがって，$x = F^{-1}(x)$ が任意の $x \in a$ について成り立つ．ゆえに $F^{-1} = 1_a$，したがって $F = 1_a$ となる．▌

系 2　$(a, f), (b, g)$ を整列集合，F, G を a から b の上への順序同型写像とすれば，$F=G$．

証明　$G^{-1} \circ F \in \mathrm{Aut}(a, f)$ だから，$G^{-1} \circ F = 1_a$，ゆえに $F=G$ である．▌

$(a, \prec)$ を整列集合，$s \subset a$ とすると，部分順序集合 $(s, \prec)$ はまた整列集合となる．(ここで，$(s, \prec)$ の $\prec$ は厳密には $\prec \cap (s \times s)$ のことである.)　いま，$x \in a$ とするとき，s として x の切片 $s(x)$ をとると，つぎの命題が成り立つ．

系 3　$(a, \prec)$ を整列集合，$x \in a$ とすると，$(a, \prec)$ とその部分整列集合 $(s(x), \prec)$ とは順序同型にはならない．

証明　$F: a \to s(x)$ が全単射で順序同型になるとすると，$F(x) \in s(x)$ ゆえに，$F(x) \lneqq x$ となるが，上の定理によりこれは不可能である．▌

整列集合に関して著しいことは，それらが互いに‘比較可能’であるということである．つぎの定理によってそれが示される．

定理 5.7　$(a, f), (b, g)$ を整列集合とすれば，つぎの三つの場合の中のいずれか一つ，そして一つのみが起こる．

(i)　$(a, f) \simeq (b, g)$

(ii)　a の元 x で，$(s(x), f) \simeq (b, g)$ となるようなものが存在する

(iii) b の元 y で，$(a, f) \simeq (s(y), g)$ となるようなものが存在する．

証明 a または b が空集合の場合には定理は明らかに成り立つから，a も b も空集合ではない場合を考えよう．$\alpha = \min a$, $\beta = \min b$ とおく．$a_0 = \{x \in a \mid \exists y(y \in b \wedge (s(x), f) \simeq (s(y), g))\}$ とおけば，$a_0 \ni \alpha$ となり，また $x \in a_0 \Longrightarrow s(x) \subset a_0$ が成り立つ．したがって，もしも $a - a_0 \neq \phi$ ならば，$\alpha_1 = \min(a - a_0)$ とおくとき，$a_0 = s(\alpha_1)$ となる．また，$x \in a_0$ のとき，$s(x) \simeq s(y)$ となる b の元 y は定理5.6系3によって一意的に定まる．ここで，写像 $F: a_0 \to b$ を $x \in a_0$ に対して $F(x) = y$（ただし $s(x) \simeq s(y)$）となるように定めれば，F は明らかに順序同型写像となる．$b - F[a_0] \neq \phi$ ならば，$\beta_1 = \min(b - F[a_0])$ とするとき $F[a_0] = s(\beta_1)$ となる．こうして，$a_0 \simeq F[a_0]$，しかも a_0 は a または a の切片，$F[a_0]$ は b または b の切片となることがわかった．ここで，$a_0 \subsetneqq a$ のときに $F[a_0] = b$ となることを示せば十分である．（定理の三つの場合の中どの二つも同時には起こらないことは，定理5.6系3によって明らかである．）$a_0 = s(\alpha_1)$ しかも $F[a_0] = s(\beta_1)$ とすれば，$s(\alpha_1) \simeq s(\beta_1)$ だから，a_0 の定義により $\alpha_1 \in a_0$ となり，これは矛盾である．▌

ω から集合 A への写像を‘帰納的’に定める方法を与えるものとして，§2.3で示された帰納定理（定理2.5）があった．それによれば，A の元 a と写像 $f: A \to A$ が与えられているときに，写像 $F: \omega \to A$ で，$F(0) = a$, $F(n^+) = f \circ F(n)$ となるものが一意的に存在する．同様な定理は ω のかわりに任意の整列集合をとっても成り立つだろうか．ω において，$n \in \omega$, $s'(n)$ を n の上切片，すなわち $\{x \in \omega \mid n < x\}$ とすれば，$n^+ = \min s'(n)$ である．同様にして，a を整列集合，$x \in a$, $s'(x) \neq \phi$ とすれば，x の**直後の元**(successor) x' を $x' = \min s'(x)$ とおいて定めることができ，a についても帰納定理と同様の命題を考えることができる．ところが，帰納定理の証明においては，0とは異なる自然数 n は‘直前の元’$n-1$ を持つということが用いられた．整列集合 a の元 x は，a の最小元とは異なっても‘直前の元’を持つとは限らない．ここで，a の元 y が x の**直前の元**(predecessor) であるとは，$y = \max s(x)$ となることを意味する．たとえば，$a = \omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ とおけば，$(\omega^+, \subset)$ は明らかに整列集合となり，$\omega = \max \omega^+$, $s(\omega) = \omega$ となるが，ω は直前の元を持たない．帰納定理においては，自然数 $n\,(>0)$ の像 $F(n)$ が，$F(n-1)$ から定まるという条件が用いられたが，いまこの定理を任意の整列集合 $(a, <)$ の場合に拡張するためには，“a の元 x の像 $F(x)$ が，下切片 $s(x)$ の像

$F[s(x)]$ または，$F|_{s(x)}$ によって定まる”という条件を考えるとよい．x の直前の元は存在しないとしても，切片 $s(x)$ は確定するからである．

いま，$(a, \prec)$ を整列集合，A を空でない集合，$x \in a$ とするとき，$A^{s(x)}$ の元 f，すなわち写像 $f: s(x) \to A$（のグラフ）を A に含まれる x **型の点列** (sequence of type x) と呼ぶことにしよう．特に $(a, \prec) = (\omega^+, \subset)$ のとき，A に含まれる ω 型の点列とは，いままでの意味での‘A に含まれる点列’である．任意の A に含まれる x 型の点列をまた A の元に対応させるような一定の方法が与えられていれば，整列集合 $(a, \prec)$ についても帰納定理と同様の命題が成り立つだろうことが期待できる．そのために，上のような点列全体からなる集合 $\Sigma(a, A)$ を考えよう．すなわち，

$$\Sigma(a, A) = \{f \in \mathcal{P}(a \times A) \mid \exists x(x \in a \wedge f \in A^{s(x)})\}$$

とおくのである．ここで，つぎの定理が成り立つ．

定理 5.8（超限帰納定理）　$(a, \prec)$ を整列集合，A を空でない集合とし，写像 $\varphi: \Sigma(a, A) \to A$ が与えられているとすると，写像 $F: a \to A$ で，a の任意の元 x に対して $F(x) = \varphi(F|_{s(x)})$ を成り立たせるようなものが一意的に存在する．

証明　まず上のような写像 F が存在することを示そう．F は，$a \times A$ の部分集合で適当な条件を満たすものとして与えられる．

いま，

$$\mathcal{F} = \{\tilde{F} \in \mathcal{P}(a \times A) \mid \forall x \forall f(x \in a \wedge f \in A^{s(x)} \wedge f \subset \tilde{F} \Longrightarrow (x, \varphi(f)) \in \tilde{F})\}$$

とおこう．$a \times A$ は $\mathcal{F}$ の元であるから，$\mathcal{F} \neq \phi$．ここで $F = \bigcap \mathcal{F}$ とおき，この F が求めるものであることを示す．F は a から A への対応であるが，さらに F が a から A への写像となることをいえば，$F|_{s(x)}$ $(x \in a)$ は明らかに A に含まれる x 型の点列だから F が定理の条件を満たすことがわかる．F が a から A への写像となることをいうために，a の元 x で，像 $F(x)$ が A の元のシングルトンにはならないようなもの全体から成る a の部分集合を c とおき，$c \neq \phi$ と仮定して矛盾を導こう．$y = \min c$ とおけば，明らかに $F|_{s(y)}$ は A に含まれる y 型の点列である．ゆえに，$(y, \varphi(F|_{s(y)})) \in F$ となる．ところが，$y \in c$ だから $F(y)$ に含まれる元として $\varphi(F|_{s(y)})$ とは異なる X が存在する．ここで，$F' = F - \{(y, X)\}$ とおけば，$F' \in \mathcal{F}$ となることが容易に確かめられる．ところが，$F' \subsetneqq F$ であり，これは，$F = \bigcap \mathcal{F}$ と矛盾する．こうして，定理の条件を満たす写像 F が存在す

ることがわかった．F の一意性は，超限帰納法によって示される．実際，写像 $G: a \to A$ が F と同様の条件を満たすものとしよう．このとき，a の元 x に関する命題 $P(x)$ として，“$F(x)=G(x)$” というものを考えよう．いま，切片 $s(x)$ の任意の元 y について $P(y)$ が成り立てば，点列 $F|_{s(x)}$ と点列 $G|_{s(x)}$ とは相等しいから，定理の条件によって，

$$F(x) = \varphi(F|_{s(x)}) = \varphi(G|_{s(x)}) = G(x).$$

すなわち $P(x)$ が成り立つ．したがって，超限帰納法を適用することができて，$F=G$ が成り立つ．▌

第6章　順序数, 基数

§6.1　順序数

自然数 0, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$, …, 自然数全体の集合 ω, それに $\omega^+=\omega\cup\{\omega\}$ などはみな包含関係について整列集合となる．これらはみな‘典型的’な整列集合であるが，これらに共通する著しい性質の一つに，x をこれらの中の任意のものの元とするとき，切片 $s(x)$ と x とが相等しいというものがある．一般に，$(a, \prec)$ を整列集合とするとき，a の任意の元 x について $x=s(x)$ が成り立つならば $(a, \prec)$（または a）を**順序数** (ordinal number) と呼ぶ．上に述べたように，自然数，ω, ω^+ などは順序数であるが，$\{0,2\}$, $\omega-\{0\}$ などはそれらを包含関係について整列集合とみなすとき順序数ではない．

$(a, \prec)$ を順序数としよう．$x, y\in a$ とすると，$x\precneqq y \Leftrightarrow x\in s(y) \Leftrightarrow x\in y$, ゆえに，$x\precneqq y \Leftrightarrow x\in y$ が成り立つ．さらに，$x\precneqq y \Leftrightarrow s(x)\subsetneqq s(y)$ だから，

$$x\precneqq y \Leftrightarrow x\subsetneqq y \Leftrightarrow x\in y$$

が成り立つ．したがってこのとき，順序関係 $\prec$ は包含関係 $\subset$ に他ならず，a の集合論的構造のみによって定まってしまう．このことから，順序数 $(a, \prec)$ を単に a と表わしてもよいことがうなずけよう．順序数は α, β などの文字で表わされることが多い．

α を順序数，$x\in\alpha$ とすると，$s(x)=\{y\in\alpha\mid y\in x\}=x$ となるから，$x\subset\alpha$ となり，これからわかるように，$y\in x$ が与えられれば，y の α における切片と x における切片とは相等しくなる．したがって，このとき x もまた順序数となる．

順序数には自然数のように有限のものも，ω や ω^+ のように無限のものもある．後者を**超限順序数** (transfinite ordinal number) と呼ぶ．順序数 α の後継ぎ $\alpha^+=\alpha\cup\{\alpha\}$ は，（包含関係に関して）また順序数となる．しかも，$\alpha\notin\alpha$（なぜならば，$\alpha\in\alpha$ ならば $\alpha\precneqq\alpha$ だが，$\alpha=\alpha$ だからこれは矛盾）であるから $\alpha\subsetneqq\alpha^+$, すなわち α^+ は α を真部分集合として含む順序数となる．またこのとき，順序数 β が α^+ の真部分集合ならば，$\beta\subset\alpha$ となる．実際，$\beta\subset\alpha^+\wedge\beta\not\subset\alpha$ ならば，$\alpha\in\beta$ とな

るが，いま $\alpha\in\beta\Leftrightarrow\alpha\subsetneqq\beta$ だから，$\alpha\cup\{\alpha\}\subset\beta\subset\alpha^+$，ゆえに $\beta=\alpha^+$ となってしまうからである．これらのことから，もしも順序数 α,β について $\alpha^+=\beta^+$ が成り立てば，$\alpha=\beta$ が成り立つことが直ちにわかる．

順序数 α は，順序数 β で $\alpha=\beta^+$ となるようなものが存在するとき，**直前の元** (predecessor) β を持つといわれ，またそのとき**孤立順序数** (isolated ordinal number) と呼ばれる．α が直前の元を持つならば，その直前の元となる順序数は α によって一意的に定まる．有限順序数や ω^+, $(\omega^+)^+$ などは直前の元を持つが，ω は直前の元を持たない．直前の元を持たない順序数は**極限数** (limit number) と呼ばれる．

定理 6.1　α,β を順序数とすれば，$\alpha\simeq\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$ が成り立つ．

証明　f を α から β の上への順序同型写像とすれば，$f=1_\alpha$ となることを示せば十分である．α の元 x についての命題 $P(x)$ を，"$f(x)=x$" としよう．いま，$y\in s(x)$ について必ず $P(y)$ が成り立つとし，$f(x)=z$ とすれば，z の (β における) 切片は f が順序同型写像だから明らかに x の切片 $s(x)$ の f による像 $f(s(x))$ となり，$s(x)$ と相等しい．ところが，x,z はそれぞれその切片に相等しいのだから，$f(x)=x$ となり $P(x)$ が成り立つ．ゆえに超限帰納法によって，$f=1_\alpha$ である．▌

系　α,β を順序数とすると，$\alpha\subsetneqq\beta$, $\alpha=\beta$, $\beta\subsetneqq\alpha$ の中のどれか一つ，しかも一つだけの場合が起こる．

問題 6.1　上の系を証明せよ．(定理 5.7 を用いるとよい.)　——

順序数 2, 5 の合併 $2\cup5$ は，$2\subset5$ ゆえに 5 に等しい．有限順序数全体の合併集合は ω に等しい．一般に A を順序数を元とする集合とすると $\bigcup A$ は (包含関係に関して) また順序数となる．実際 $x\in\bigcup A$ とすれば，A の元 α で x を含むものがあるが，x の $\bigcup A$ における切片 $s(x)$ は $\{y\in\bigcup A\mid y\subsetneqq x\}$ であるから，$s(x)$ の元 y は必ず α に含まれ，α が順序数であることにより $x=s(x)$ となる．したがって，$\bigcup A$ は順序数である．また，α を任意の順序数とするとき，上に述べたように $\alpha\subsetneqq\alpha^+$ だから，つぎの定理が成り立つ．

定理 6.2　集合 A を順序数のみを元とするものから成るとすると，順序数 α で，A に含まれる任意の順序数 ξ に対して $\xi\subsetneqq\alpha$ となるものが存在する．

証明　$\alpha=(\bigcup A)^+$ とすればよい．▌

系 順序数全体から成る集合は存在しない．

定理 6.3 A を順序数から成る集合とすると，$(A, \subset)$ は整列集合となる．

証明 $S \subset A$, $S \neq \phi$ のとき，$\min S$ が存在することを示せばよい．$\alpha \in S$ としよう．$s = \{\beta \in S \mid \beta \subsetneqq \alpha\}$ とすれば，$s = \{\beta \in S \mid \beta \in \alpha\}$ であり，$s = \alpha \cap S$, ゆえに $s \neq \phi$ ならば，α は $\subset$ に関して整列集合だから $\gamma = \min s$ が存在する．A が全順序集合，したがって S も全順序集合となることから，このとき $\gamma = \min S$ となることがわかる．また $\alpha \cap S = \phi$ ならば，明らかに $\alpha = \min S$ となる．▌

順序数は整列集合の特別なものであり，いわば整列集合という枝や葉をつけた樹の中心にあって，無限に延びる幹のようなものである．このことは，つぎの定理からも見てとれる．

定理 6.4 $(a, \prec)$ を任意の整列集合とすると，順序数 α で，$a \simeq \alpha$ となるものが一意的に存在する．——

$a \simeq \alpha$ となるような順序数が存在すれば，それが一意的であることは，定理 6.1 から明らかであるが，α の存在を示すためには，少しばかり準備をしなければならない．α の存在を示すには超限帰納法を用いるのだが，その場合に，$x \in a$ についての命題 $P(x)$ として，"x の切片 $s(x)$ と順序同型な順序数が存在する" というものをとるとき，$s(x)$ の任意の元 y に対して $P(y)$ が成り立つ，すなわち，$s(y) \simeq \alpha_y$ となるような順序数 α_y が存在するとして，それから $P(x)$ の成り立つことを示さなければならない．ところが，ここで困難が生じるのである．この '困難' は，一見何でもないもののようで，$s(x)$ と順序同型となるような順序数 α_x としては，α_y $(y \in s(x))$ 全体の合併集合をとればよかろうとも思えよう．ところが，ここで，'α_y $(y \in s(x))$ 全体' なるものがまた集合であるということが示されない限り 'それらの合併集合' は定義さえされていないのである．もっとも，$s(x)$ が有限集合の場合には，問題はないし，また α_y $(y \in s(x))$ がすべて或る集合 b に含まれることがわかっていれば，分出公理によってそれら全体から成る集合が b の部分集合として確定する．しかし，$s(x)$ は一般にはきわめて '大きな' 対象になり得るので，上のようなことは容易には示されない．ここで，この困難を乗りこえるために，つぎの置換公理が用いられる．

S 9)（置換公理） $P(x, y)$ を x, y を自由変数とする命題とし，a を集合とするとき，つぎのことが成り立つ．

$$\forall x[x \in a \Longrightarrow \forall y \forall z(P(x, y) \wedge P(x, z) \Longrightarrow y=z)]$$
$$\Longrightarrow \exists b \forall u[u \in b \Longleftrightarrow \exists x(x \in a \wedge P(x, u))].$$ ——

すなわち，a の任意の元 x に対して $P(x, y)$ が成り立つような y が存在すればそれは一意的であるとしよう．そのとき集合 b で，$P(x, u)$ $(x \in a)$ を成り立たせるような u 全体から成るものが存在するというのである．

定理6.4の証明 順序数 α で，$a \simeq \alpha$ となるようなものが存在することを示せば十分である．命題 $P(x, \xi)$ として，"$x \in a \wedge \xi$ は順序数 $\wedge\, s(x) \simeq \xi$" というものをとろう．すると，定理6.1より明らかに $P(x, \xi)$ を成り立たせるような ξ が存在すればそれは一意的である．ここで，$x \in a$ とし，x に関する命題 $Q(x)$ として，"$s(x)$ と順序同型な順序数が存在する" というものを考えよう．($Q(x)$ は，上では $P(x)$ と書いたものだが，$P(x, \xi)$ との混同を避けるためこのように表わす.) $s(x)$ に含まれる任意の元 y について $Q(y)$ が成り立てば，$s(y) \simeq \xi_y$ となる順序数 ξ_y が一意的に存在するから，置換公理によって集合 b で，ξ_y $(y \in s(x))$ の全体から成るものが存在する．ここで，$\beta = \bigcup b$ とおけば，β は順序数である．いま，$\xi \in b$ とすれば，$\xi \subset \beta$ ゆえに $\xi \in \beta^+$ となる．したがって，写像 $f: s(x) \to \beta^+$ を，$y \in s(x)$ に対して $f(y) = \xi_y$ とおいて定めることができる．f が順序を保つ単射となることは直ちに確かめられるから，$f[s(x)] = \alpha_x$ とおけば，$\alpha_x \subset \beta^+$ ゆえに $\alpha_x \in \beta^+$ または $\alpha_x = \beta^+$ となり，α_x は $s(x)$ と順序同型な順序数である．すなわち，このとき $Q(x)$ が成り立つことが示された！ ここで超限帰納法を用いれば，a の任意の元 x について $Q(x)$ が成り立つこと，すなわち $s(x) \simeq \alpha_x$ となるような順序数が存在し，したがって一意的に存在することがいえた．さて，置換公理をもう一度用いれば，集合 c で，α_x $(x \in a)$ の全体から成るものが存在する．$\gamma = \bigcup c$ とおき，上と全く同様な論法をくり返せば，$\alpha \subset \gamma^+$ となる順序数 α で，$a \simeq \alpha$ となるものが存在することが示される．▌

$(a, \prec)$ を整列集合とするとき，$a \simeq \alpha$ となるようなただ一つの順序数 α を $\mathrm{ord}(a, \prec)$ (または $\mathrm{ord}\, a$) と書き，これを $(a, \prec)$ (または a) の順序数と呼ぶことにする．

§6.2 順序数の和，積，べき

自然数は有限順序数であり，それらの間に和，積，べきが定義されることは既に

述べた. これらの‘代数的算法’は一般の順序数の間にも定義される. ただし, 前節に述べたように, ‘順序数全体の集合’なるものは存在しないので, ω から代数系を得たのと同じように‘順序数全体’を台集合とするような代数系を得ることはできないし, ‘和’, ‘積’, ‘べき’の定義もいくらかデリケートなものになる. これらの‘算法’の定義の仕方には超限帰納法を用いるものもあるが, ‘和’, ‘積’の定義としては, より‘原始的’なものをとろう.

$1+2=3$ ということを, “長さ1の棒に長さ2の棒をつぎたすと, 長さ3の棒ができる”のように説明することは, ‘日常的’な場面ではときどきなされることである. この考えを一般化して順序数の‘和’を定義することができる. さて, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$ であったが, $\{0\}$ に $\{0,1\}$ を‘つぎ足す’には, たとえば1の元0に‘0番目’の番号をつけ, 2の元0, 1にはそれぞれ‘1番目’の番号をつけて, それらを合わせればよい. より一般的に, 集合 a,b が与えられたとき

$$a\oplus b = a\times\{0\} \cup b\times\{1\}$$

とおき, これを a,b の **disjoint sum** と呼ぶことにする. たとえば, $1\oplus 2=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ である. 特に, $(a,f),(b,g)$ が順序集合である場合, $a\oplus b$ の元 $(x,m),(y,n)$ $(x,y\in a\cup b,\ m,n\in 2)$ に対して,

$$\begin{aligned}&(x,m)\leqq(y,n)\\ &\quad\Leftrightarrow [m<n \vee (m=n=0\wedge x\underset{f}{\prec} y)\vee(m=n=1\wedge x\underset{g}{\prec} y)]\end{aligned}$$

を成り立たせるような関係 $\leqq$ をとれば, $\leqq$ は順序関係となることが容易に確かめられる. 特に $(a,f),(b,g)$ がともに整列集合ならば, $(a\oplus b,\leqq)$ も整列集合となる. たとえば $(1\oplus 2,\leqq)\simeq 3$ となる!

α,β を順序数とするとき, $\mathrm{ord}(\alpha\oplus\beta,\leqq)$ を α,β の**和**と呼び, 単に $\alpha\oplus\beta$ と書く. (普通は, $\alpha\oplus\beta$ は $\alpha+\beta$ と書かれるが, 本講では後に述べる基数の和との混同を避けるために, このような記法をとる.) 特に $\alpha\oplus 0=0\oplus\alpha=\alpha$, $\alpha\oplus 1=\alpha^+$ であるが, $1\oplus\alpha=\alpha^+$ とは限らない. たとえば, $1\oplus\omega$ から ω への写像 F を, $F((0,0))=0$, $F((n,1))=n^+$ $(n\in\omega)$ によって定めれば, F は $1\oplus\omega$ から ω の上への順序同型写像となり, したがって, $1\oplus\omega=\omega$ が成り立つ. 特に $n,m\in\omega$ のときには $n\oplus m=n+m$ である.

定理 6.5 α,β を順序数とすると, つぎのことが成り立つ.

$$\alpha \subsetneqq \beta \iff \text{順序数 } \gamma \neq 0 \text{ で，} \beta = \alpha \oplus \gamma \text{ となるものがある.}$$

証明　$\beta=\alpha\oplus\gamma,\ \gamma\neq 0 \Longrightarrow \alpha\subsetneqq\beta$ は明らかだから，$\alpha\subsetneqq\beta$ のときに，$\beta=\alpha\oplus\gamma$ となるような順序数 $\gamma\neq 0$ が存在することを示そう．$\beta-\alpha=c$（集合論的差）とすれば，c は β の部分集合だから $\subset$ に関して整列集合となり，$\beta=\alpha\cup c,\ \alpha\cap c=\phi$ となる．また $\alpha\in\beta$ だから $\alpha=s(\alpha)$，ゆえに $\xi\in c$ とすれば，α の任意の元 η に対して $\eta\subsetneqq\xi$ となる．ゆえに，$\gamma=\mathrm{ord}(c,\subset)$ とおけば，$\beta\simeq\alpha\oplus\gamma$ となることは明らかである．したがって，$\beta=\alpha\oplus\gamma$. ▌

系　順序数 α に対して，α が無限集合であることと $\alpha=\omega\oplus\beta$ と書けるような順序数 β が存在することとは同値である．

証明　定理 6.1 の系から，α が無限集合ならば明らかに $\omega\subset\alpha$ となるから，上の系は明らかである．▌

上で述べたことをさらに一般化しよう．$(I,\prec)$ を整列集合，$\{a_i\}_{i\in I}$ を I を添数集合とする集合とし，各 a_i に対して f_i をその元の間の順序関係であるとする．ここで，$i,j\in I$ に対して $i\neq j$ ならば必ず $a_i\cap a_j=\phi$ であるとし，A を直和集合 $\bigcup_{i\in I} a_i$ とする．A の元 $x_i\in a_i,\ y_j\in a_j$ に対し，

$$x_i \leqq y_j \iff i\prec j \vee (i=j\wedge x_i \underset{f_i}{\prec} y_j)$$

が成り立つような関係 $\leqq$ をとれば，$(A,\leqq)$ は順序集合となる．ここで，(a_i,f_i) $(i\in I)$ がすべて整列集合となるときには，$(A,\leqq)$ も整列集合となることがわかる．実際 $S\subset A,\ S\neq\phi$ とすれば，$\{i\in I \mid S\cap a_i\neq\phi\}$ は空集合ではないから最小元 i_0 を含む．x を $S\cap a_{i_0}$ の f_{i_0} に関する最小元とすれば，x は明らかに S の $\leqq$ に関する最小元となる．

さて，一般に I を集合，$\{w_i\}_{i\in I}$ を I を添数集合とする集合とし，$a_i=w_i\times\{i\}$ とおこう．$\{a_i\}_{i\in I}$ はまた I を添数集合に持つ集合となり，$i,j\in I,\ i\neq j$ ならば，$a_i\cap a_j=\phi$ である．このとき，直和 $A=\bigcup_{i\in I} a_i$ を $\{w_i\}_{i\in I}$ の **disjoint sum** と呼び $\bigoplus_{i\in I} w_i$ と書くことにする．特に，I, w_i それぞれの元の間の関係 $\prec, f_i$ で $(I,\prec)$，(w_i,f_i) がともに整列集合となるようなものが与えられれば，a_i の元の間の関係 $\tilde{f}_i$ で，$(w_i,f_i)\simeq(a_i,\tilde{f}_i)$ となるようなものを‘自然に’与えることができ，上のように A の元の間の順序関係 $\leqq$ を定めることができる．また，このとき $(A,\leqq)$ は整列集合となるのであった．特に $I=2=\{0,1\}$ のとき，$\bigoplus_{i\in 2} w_i=w_0\oplus w_1$ である．

さて，整列集合 I を添数集合とする順序数の集合 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ が与えられたとき，$\mathrm{ord}(\bigoplus_{i\in I}\alpha_i, \leqq)$ を $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ の**和**と呼び $\sum_{i\in I}^{\oplus}\alpha_i$ と書く．特に $I=2$ のとき，$\sum_{i\in 2}^{\oplus}\alpha_i=\alpha_0\oplus\alpha_1$ である．また，$I=n=\{0,1,\cdots,n-1\}$ $(n>1)$ のとき $\sum_{i\in n}^{\oplus}\alpha_i$ を $\alpha_0\oplus\alpha_1\oplus\cdots\oplus\alpha_{n-1}$ のようにも書く．特に $\alpha_0\oplus\alpha_1\oplus\alpha_2=(\alpha_0\oplus\alpha_1)\oplus\alpha_2=\alpha_0\oplus(\alpha_1\oplus\alpha_2)$ だから，順序数の和に関して結合法則が成り立つ．

定理 6.5 を用いると，α,β,γ を順序数とするとき

$$\alpha\oplus\beta=\alpha\oplus\gamma \iff \beta=\gamma$$

が成り立つことがわかる．(実際，$\beta\neq\gamma$ ならば $\beta\subsetneqq\gamma$ または $\gamma\subsetneqq\beta$ だが，$\beta\subsetneqq\gamma\Longrightarrow\gamma=\beta\oplus\delta$, $\delta\neq 0$，ゆえに，$\alpha\oplus\gamma=\alpha\oplus(\beta\oplus\delta)=(\alpha\oplus\beta)\oplus\delta$ となり，$\alpha\oplus\beta\subsetneqq\alpha\oplus\gamma$ となる．$\gamma\subsetneqq\beta$ のときにも同様にして $\alpha\oplus\gamma\subsetneqq\alpha\oplus\beta$ となるから，上の命題が成り立つことは明らかである．)

問題 6.2　α を順序数，$n\in\omega-\{0\}$ とする．このとき，α が無限集合であることと $n\oplus\alpha=\alpha$ は同値であることを示せ．——

さて，disjoint sum $\bigoplus_{i\in I}w_i$ (I は整列集合) において，各 (w_i,f_i) が与えられた整列集合 (w,f) に等しければ，$\bigoplus_{i\in I}w_i$ は順序対 (x,i) $(x\in w,\ i\in I)$ 全体から成る集合で，直積 $w\times I$ と相等しい．しかも，$w\times I$ の元 (x,i), (y,j) に対して，

$$(x,i)\leqq(y,j) \iff i<j \vee (i=j\wedge x\underset{f}{<}y)$$

が成り立つ．(直積 $w\times I$ の元の間の上のような順序関係 $\leqq$ は，f と $<$ によって定まる**逆辞書式順序関係** (reverse lexicographic order) と呼ばれる．特に w, I として順序数 α,β をとるとき，$(\alpha\times\beta,\leqq)$ はまた整列集合となる．ここで，$\mathrm{ord}(\alpha\times\beta,\leqq)$ を α,β の**積** (product) と呼び，$\alpha\otimes\beta$ と書く．($\alpha\otimes\beta$ は普通 $\alpha\beta$ と書かれるが，ここでも後述する基数の積との混同を避けるために，このような記法を用いる．) 上に述べたことから明らかなように，$\alpha\otimes 0=0\otimes\alpha=0$, $\alpha\otimes 1=1\otimes\alpha=\alpha$，また $\alpha\oplus\alpha=\alpha\otimes 2$, $\alpha\oplus\alpha\oplus\alpha=\alpha\otimes 3$, $\cdots$ が成り立つ．特に $n,m\in\omega$ のとき，n,m の順序数としての積 $n\otimes m$ は n,m を自然数としてその積 nm をとり，それを順序数とみなしたものと相等しい．また，この積について結合法則 $(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)$ が成り立つこと，また左分配法則 $\alpha\otimes(\beta\oplus\gamma)=\alpha\otimes\beta\oplus\alpha\otimes\gamma$ (ここで，$\alpha\otimes\beta\oplus\alpha\otimes\gamma$ は $(\alpha\otimes\beta)\oplus(\alpha\otimes\gamma)$ の意味である．このような場合，順序数の算法においても，自然数の場合と同様，積をまず行ない，その後に和を続けるのである)

が成り立つことは，定義から容易に確かめられる．積についての交換法則は，しかし，一般には成り立たない．たとえば，直積集合 $2\times\omega=\{0,1\}\times\omega$ から ω への写像 f を，$f((0,n))=2n$, $f((1,n))=2n+1$ によって定めれば，f は $2\times\omega$ から順序数 ω の上への ($\leqq, \subset$ に関する) 順序同型写像となるから，$2\otimes\omega=\omega$ であり，$2\otimes\omega\subsetneqq\omega\otimes 2$ となる．同様に右分配法則 $(\alpha\oplus\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes\gamma\oplus\beta\otimes\gamma$ も成り立たない．(たとえば，$(1\oplus 1)\otimes\omega\neq\omega\oplus\omega$.)

α を任意の順序数とするとき，$\alpha\otimes\alpha=\alpha^{\otimes 2}$, $\alpha^{\otimes 2}\otimes\alpha=\alpha^{\otimes 3}$, … と書く．また $\alpha^{\otimes 0}=1$ とおく．(ここでも，普通は $\alpha^{\otimes 2}$ 等は α^2 等と書かれるが，基数のべきとの混同を避けるために，このような記法を用いる.) $\alpha^{\otimes\omega}$ は定義されるだろうか．一般に α, β を順序数とするとき，べき $\alpha^{\otimes\beta}$ が定義されるのだが，その前に準備としてまず順序数の集合の‘上限’という概念について述べよう．

A を順序数から成る集合とする．定理 6.2 により，順序数 α で，A に含まれる任意の順序数 ξ に対して $\xi\subset\alpha$ となるようなものが存在する．このような α を，A の**上界** (upper bound) に属する順序数と呼ぼう．α が A の上界に属するためには，$\bigcup A\subset\alpha$ となることが必要十分である．ここで，

$$S_\alpha(A)=\{\beta\in\alpha \mid \bigcup A\subset\beta\}\cup\{\alpha\}$$

とおく．$S_\alpha(A)\subset\alpha^+$ だから，$S_\alpha(A)$ 自身順序数であり，$S_\alpha(A)\neq\phi$ であるから $\min S_\alpha(A)=\alpha_0$ が存在する．α_0 が A のみによって定まることを示そう．そのため，β を A の上界に属する順序数とし，$\min S_\beta(A)=\beta_0$ とおく．もしも，$\beta\subsetneqq\alpha$ ならば，$\beta\in S_\alpha(A)$ だから $\beta_0\in S_\alpha(A)$，ゆえに $\alpha_0\subset\beta_0$ となるが，$\beta_0\in\beta$ より $\alpha_0\in\beta$，よって $\alpha_0\in S_\beta(A)$，ゆえに $\beta_0\subset\alpha_0$ が成り立ち，これらから $\alpha_0=\beta_0$ がいえる．$\alpha\subsetneqq\beta$ のときにも同様にして $\alpha_0=\beta_0$ となる．こうして，α の選び方によらずに A だけから定まる順序数 α_0 を A の**上限** (supremum) と呼び $\sup A$ と書くことにする．

問題 6.3 α を順序数，A を順序数の集合とする．このとき，α と A に属する順序数 ξ の和 $\alpha\oplus\xi$ 全体はまた集合を成すからこれを $\alpha\oplus A$ と略記する．($\alpha\oplus A$ は，$\alpha\oplus(\bigcup A)^+$ の部分集合である.) $\alpha\otimes\xi$ ($\xi\in A$) 全体の集合も，同様に $\alpha\otimes A$ と書く．このとき，

$$\alpha\oplus(\sup A)=\sup(\alpha\oplus A)$$
$$\alpha\otimes(\sup A)=\sup(\alpha\otimes A)$$

が成り立つことを示せ．和，積の順序を逆にすればどうか．——

置換公理によって，$\alpha^{\otimes n}$ $(n \in \omega)$ 全体から成る集合 $A=\{\alpha^{\otimes n}\}_{n\in\omega}$ が存在する．そこで，$\alpha^{\otimes\omega}=\sup A$ と定義するのである．

ここで，$\omega^{\otimes\omega}$ について少しくわしく見ておこう．$\omega^{\otimes\omega}$ の定義により，任意の自然数 n に対して $\omega^{\otimes n}\subset\omega^{\otimes\omega}$ が成り立つ．いま ω を添数集合とする集合 $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ として，$\alpha_n=\omega$ $(n\in\omega)$ となるものをとり，直積 $\prod_{n\in\omega}\alpha_n$ を a とおこう．任意の $n\in\omega$ に対して直積 $\omega^n=\underbrace{\omega\times\omega\times\cdots\times\omega}_{n}$ から a への写像 λ_n を

$$\lambda_n((x_0, \cdots, x_{n-1})) = (x_0, \cdots, x_{n-1}, 0, 0, \cdots)$$

によって定めれば，λ_n は単射であり，ω^n と $\lambda_n(\omega^n)$ とを‘同一視’することができる．$\omega^{\otimes\omega}$ と $\prod\alpha_n$ は集合として同じものだろうか．$\prod\alpha_n=a$ の元の間の順序関係 $\leqq$ として，つぎのような，‘逆辞書式’のものを考えよう．$(x_i), (y_i)\in a$ とするとき，

$$(x_i)\leqq(y_i)$$
$$\iff (x_i)=(y_i) \vee \exists n[n\in\omega\wedge x_n<y_n\wedge\forall m(m\in\omega-n^+\Longrightarrow x_m=y_m)]$$

が成り立つように，$\leqq$ を定めるのである．たとえば，

$$(0,1,1,1,\cdots)\leqq(0,2,1,1,\cdots), \qquad (0,2,0,1,1,\cdots)\leqq(0,0,1,1,1,\cdots).$$

$\leqq$ が順序関係となることは容易に確かめられる．そして，$\lambda_n(\omega^n)$ を a の部分順序集合と考えたものは，順序数 $\omega^{\otimes n}$ と，明らかに順序同型である．しかし，$(a, \leqq)$ は整列集合にはならないばかりか，全順序集合とさえならない．実際，$(1,1,1,\cdots)$ と $(2,2,2,\cdots)$ は $\leqq$ に関して‘比較’することができない．実は，a は $\omega^{\otimes\omega}$ の候補としては‘大き過ぎ’たのである．a の部分集合 s で $\lambda_n(\omega^n)$ をすべて含むようなものとして，$\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ の**制限直積** (restricted direct product) と呼ばれるものがある．s は，a の元 (x_i) で，有限個の i $(\in\omega)$ を除いて，x_i がすべて 0 となるようなもの全体から成る a の部分集合である．すなわち，

$$s=\{(x_i)\in a \mid \exists n[n\in\omega\wedge\forall m(m\in\omega-n^+\Longrightarrow x_m=0)]\}.$$

s は明らかに任意の $\lambda_n(\omega^n)$ $(n\in\omega)$ を含む．$(s, \leqq)$ が整列集合となることを確かめよう．$b\subset s$, $b\neq\phi$ とするとき，

$$t=\{n\in\omega \mid \exists x[x=(x_i)\in b\wedge\forall m(m\in\omega-n\Longrightarrow x_m=0)]\}$$

としよう．b の任意の元 (x_i) をとると，‘十分大きな’ m に対して $x_m=0$ だから，

$t \neq \phi$ である．ここで，$m_0 = \min t$ とおこう．$m_0 = 0$ ならば $(0, 0, \cdots) \in b$, $(0, 0, \cdots) = \min b$ となる．一方，$m_0 > 0$ ならば，b の元 (x_i) で $x_{m_0-1} \neq 0$, $x_{m_0} = x_{m_0+1} = \cdots = 0$ となるようなものが存在し，(x_i) で，$x_{m_0-1} = x_{m_0} = \cdots = 0$ となるようなものは存在しない．いま，$b' = \{(x_i) \in b \mid x_{m_0} = x_{m_0+1} = \cdots = 0\}$ とし，自然数 n で，この b' の元 (x_i) の '$m_0 - 1$ 成分' x_{m_0-1} と等しいようなもの全体の集合の最小元を l とおけば，b の元 (x_i) で $x_{m-1} = l$, $x_m = x_{m+1} = \cdots = 0$ となるものが存在し，明らかにそれが b の最小元となる．こうして，$(s, \leqq)$ は整列集合であることがわかった．s の任意の元 x は，適当な $n \in \omega$ について $\lambda_n(\omega^n)$ に含まれる．このことから $(s, \leqq)$ が順序数であり，しかも $\sup\{\omega^{\otimes n}\}_{n \in \omega}$ すなわち $\omega^{\otimes \omega}$ と等しいことは明らかである．

$\omega^{\otimes \omega}$ について見た事柄を一般化しよう．$(I, <)$ を空集合とは異なる整列集合とし，I を添数集合とする順序数の集合 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ で，各 α_i が空集合とは異なるようなものを考えよう．直積 $\prod_{i \in I} \alpha_i$ の部分集合で，有限個の $i \in I$ を除く i について $x_i = \min \alpha_i$ となるような元全体から成るものを $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ の**制限直積**と呼び，$\prod'_{i \in I} \alpha_i$ と書くことにする．(I が有限集合であるときには，$\prod_{i \in I} \alpha_i = \prod'_{i \in I} \alpha_i$.) 制限直積 $\prod'_{i \in I} \alpha_i$ の元の間の順序関係 $\leqq$ を，

$$(x_i) \leqq (y_i)$$
$$\Longleftrightarrow (x_i) = (y_i) \vee \exists j [j \in I \wedge x_j \in y_j \wedge \forall k (k \in I \wedge j \lneqq k \Longrightarrow x_k = y_k)]$$

が成り立つように定めれば，$\left(\prod'_{i \in I} \alpha_i, \leqq\right)$ は整列集合となることが，$\omega^{\otimes \omega}$ の場合と同様な方法で確かめられる．

そこで，$\mathrm{ord}\left(\prod'_{i \in I} \alpha_i, \leqq\right)$ を $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ の**積**と呼び，$\prod^{\otimes}_{i \in I} \alpha_i$ と書こう．また，$I \neq \phi$ で，α_i の中に $\phi = 0$ となるものがあれば，$\prod^{\otimes}_{i \in I} \alpha_i = 0$ とおき，$I = 0$ の場合には $\prod^{\otimes}_{i \in I} \alpha_i = 1$ とおく．特に $I = 2$ のとき $\prod^{\otimes}_{i \in 2} \alpha_i = \alpha_0 \otimes \alpha_1$ である．この積に関して，つぎのことが成り立つ．

(1)　α を順序数，$\beta = \alpha^+$ とし，$\{\gamma_\xi\}_{\xi \in \beta}$ を β を添数集合とする順序数の集合とする．このとき，$\prod^{\otimes}_{\xi \in \beta} \gamma_\xi = \left(\prod^{\otimes}_{\xi \in \alpha} \gamma_\xi\right) \otimes \gamma_\alpha$.

(2)　α を極限数とし，$\{\gamma_\xi\}_{\xi \in \alpha}$ を (1) と同様な順序数の集合とする ($\gamma_\xi \neq \phi$ $(\xi \in \alpha)$ とする)．$\prod^{\otimes}_{\xi \in \beta} \gamma_\xi$ $(\beta \in \alpha)$ 全体から成る順序数の集合を B とおけば，$\prod^{\otimes}_{\xi \in \alpha} \gamma_\xi = \sup B$.

(1) が成り立つことは定義から容易にわかる．(2) が成り立つことを示そう．$\beta \in \alpha$ ならば $\prod^{\otimes}_{\xi \in \beta} \gamma_\xi \subset \prod^{\otimes}_{\xi \in \alpha} \gamma_\xi$ となることは定義より明らかである．一方，順序数

$\delta(\neq\phi)$ で，$\delta\subsetneqq\prod^{\otimes}_{\xi\in\alpha}\gamma_\xi$ となるようなものが与えられたとしよう．δ は制限直積 $\prod'_{\xi\in\alpha}\gamma_\xi$ の元 x の $\leqq$ に関する切片 $s(x)$ と順序同型になる．$x=(x_\xi)$ とすると，x_ξ は有限個の ξ を除いて $\min\gamma_\xi$ に等しい．また $\delta\neq\phi$ という仮定から，或る ξ で，$x_\xi\neq\min\gamma_\xi$ となるものが存在する．$x_\xi\neq\min\gamma_\xi$ となるような有限個の順序数 ξ の中の最大のものを η としよう．いま α は極限数であるから，明らかに $\eta^+\subsetneqq\alpha$ となる．ここで，$\prod'_{\xi\in\eta^+}\gamma_\xi$ の元 $x'=(x_\xi')$ で，$x_\xi'=x_\xi\ (\xi\in\eta^+)$ となるようなものをとれば，上の $s(x)$ は，明らかに x' の $\prod'_{\xi\in\eta^+}\gamma_\xi$ における切片 $s(x')$ と順序同型になるから，$\delta\subsetneqq\prod_{\xi\in\eta^+}\gamma_\xi$ となる．したがって，このとき δ は B の上界にはなり得ない．こうして，$\prod^{\otimes}_{\xi\in\alpha}\gamma_\xi=\sup B$ となり，(2) の成り立つことが示された．

さて，上の積 $\prod^{\otimes}_{\xi\in\alpha}\gamma_\xi$ において，γ_ξ がすべて一つの順序数 β に等しいとき，この積を $\beta^{\otimes\alpha}$ と書き，これを **β の α 乗**または **α べき**と呼ぶのである．特に，$\beta^{\otimes 0}=1$, $\alpha\neq0$ のときには $0^{\otimes\alpha}=0$ とする．また明らかに $\beta^{\otimes1}=\beta$ である．さらに，上で見たことにより，α が孤立数で，$\alpha=\gamma^+$ ならば，$\beta^{\otimes\alpha}=\beta^{\otimes\gamma}\otimes\beta$, また α が極限数のときには，$\beta^{\otimes\alpha}=\sup\{\beta^{\otimes\gamma}\}_{\gamma\in\alpha}$ となる．特に $n,m\in\omega$ のときは，$n^{\otimes m}=n^m$ となる．

問題 6.4　順序数のべきについて指数法則 $\alpha^{\otimes(\beta\oplus\gamma)}=\alpha^{\otimes\beta}\otimes\alpha^{\otimes\gamma}$, $(\alpha^{\otimes\beta})^{\otimes\gamma}=\alpha^{\otimes(\beta\otimes\gamma)}$ が成り立つことを示せ．——

順序数のべきについて，$(\alpha\otimes\beta)^{\otimes\gamma}=\alpha^{\otimes\gamma}\otimes\beta^{\otimes\gamma}$ は一般には成り立たない．たとえば，$\alpha=\omega$, $\beta=\gamma=2$ のとき，$(\omega\otimes2)^{\otimes2}=(\omega\otimes2)\otimes(\omega\otimes2)=\omega\otimes(2\otimes\omega)\otimes2=\omega^{\otimes2}\otimes2$, $\omega^{\otimes2}\otimes2^{\otimes2}=\omega^{\otimes2}\otimes4$ で，$(\omega\otimes2)^{\otimes2}\subsetneqq\omega^{\otimes2}\otimes2^{\otimes2}$ となる．

これまで，集合 a から b への写像全体の集合 $\mathrm{Map}(a,b)$ をしばしば b^a と表わしたが，α,β を順序数とするとき，べき $\beta^{\otimes\alpha}$ と $\mathrm{Map}(\alpha,\beta)$ とは全く別の集合であることを注意しておこう．(たとえば，$\mathrm{Map}(\omega,2)$ は ω から $2=\{0,1\}$ への写像全体の集合であるが，$2^{\otimes\omega}=\sup\{2^n\}_{n\in\omega}=\omega$ である.)

$\omega^{\otimes\omega}$ を ω_2, $\omega^{\otimes\omega_2}=\omega_3$, $\cdots$, $\omega^{\otimes\omega_n}=\omega_{n+1}$ と書き，$\sup\{\omega_n\}_{n\in\omega}$ を ε_0 と書く．(普通用いられている記法によれば，$\omega^{\otimes\omega}$ は ω^ω, ε_0 は $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ のように書かれる.)

§6.3 基　数

集合 a の濃度または位数については§2.2 でふれ，特に a が有限集合である場合，その濃度は自然数となることを述べた．しかし，‘濃度’そのものが，集合論的にいかなる対象であるかについては，有限の濃度の場合を除いては，まだ述

べなかった．Cantor によれば，“濃度とは互いに対等な集合が持つ共通の性質”である．これは，‘直観的’な概念規定ではあるが，厳密な定義とはいえない．また，§1.1 で述べた‘集まり’または族の概念を用いて，‘集合全体の集まり’を対等関係によって‘同値類’に分け，それぞれの類を‘濃度’と名づける方法もあるが，これも Zermelo-Fraenkel の集合論からはみ出してしまうものである(‘集合全体の集まり’は，集合ではない！)．

ここでは，順序数を用いて‘濃度’の定義を与えることにする．

超限順序数として，$\omega, \omega\oplus 1, \omega\oplus 2, \cdots, \omega\otimes 2, \cdots, \omega\otimes\omega$ など多くのものがある．ところが，順序数の和，積の定義からわかるように，一般に α, β を順序数とするとき

$$\alpha\oplus\beta \approx \beta\oplus\alpha, \qquad \alpha\otimes\beta \approx \beta\otimes\alpha \approx \alpha\times\beta$$

が成り立つ．したがって，$n\in\omega$ のとき，$\omega\oplus n$ は ω よりも‘大きい’順序数だが，$\omega\oplus n\approx n\oplus\omega=\omega$ となり，集合としては $\omega\oplus n$ と ω とは対等になってしまう．同様に，$\omega\otimes n\approx n\otimes\omega=\omega$ となる．このように，順序数 α が与えられたとき，α と対等になる順序数は α 以外にも非常に多く存在することがある．しかし，これらの順序数の中の‘最小’のもの α_0 をとれば，それは α の‘濃度’によって確定するのではなかろうか．もしそうならば，α_0 を α の‘濃度’と呼んでもよさそうである．以上の事柄を，‘集合論的’に，より厳密に述べてみよう．

α を順序数とする．定理 6.2 によって $\alpha\subsetneqq\beta$ となるような順序数 β が存在する(たとえば $\beta=\alpha^+$ とすればよい)．ここで $A_\beta(\alpha)=\{\xi\in\beta \mid \alpha\approx\xi\}$ とおけば，$A_\beta(\alpha)\ni\alpha$ だから $A_\beta(\alpha)\neq\phi$ である．ゆえに，定理 6.3 によって $\min A_\beta(\alpha)=\alpha_0$ が存在する．順序数 α_0 は，β の選び方には依存しないで α だけできまる．実際，順序数 γ を $\alpha\subsetneqq\gamma$ となるようにとって，$A_\gamma(\alpha)$ を上のように定め，$\min A_\gamma(\alpha)=\alpha_1$ とおいてみよう．もしも，$\beta\subsetneqq\gamma$ ならば，$A_\beta(\alpha)\subset A_\gamma(\alpha)$ となり，したがって $\alpha_1\subset\alpha_0$ が成り立つ．ところが，$\alpha_0\subsetneqq\beta$ だから，$\alpha_1\subsetneqq\beta$，すなわち $\alpha_1\in\beta$ であり，$\alpha_1\in A_\beta(\alpha)$ となる．したがって，$\alpha_0\subset\alpha_1$，ゆえに $\alpha_0=\alpha_1$ が成り立つ．$\gamma\subsetneqq\beta$ のときにも同様に $\alpha_1=\alpha_0$ となる．こうして，α によって定まる順序数 α_0 を α の**位数**(order)，**濃度**(power)または**基数**(cardinal number)と呼び，$|\alpha|$ または $\mathrm{card}\,\alpha$ と表わすことにする．特に $n\in\omega$ ならば，$\mathrm{card}\,n=n$，また，$\mathrm{card}\,\omega\oplus n=\mathrm{card}\,\omega\otimes n=\omega$ である．一般に，α, β を順序数とするとき，

(6.1) $$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \operatorname{card}\alpha = \operatorname{card}\beta$$

が成り立つ．実際，$\alpha\approx\operatorname{card}\alpha$ だから，$\operatorname{card}\alpha=\operatorname{card}\beta \Longrightarrow \alpha\approx\beta$ が成り立つことは明らかである．また，$\alpha\approx\beta$ ならば $\alpha\subsetneqq\gamma$, $\beta\subsetneqq\gamma$ となるような順序数 γ をとると $A_\gamma(\alpha)=A_\gamma(\beta)$ となるから，$\operatorname{card}\alpha=\operatorname{card}\beta$ である．

a を任意の集合とする．整列可能定理により a の元の間の順序関係 $\prec$ で，$(a, \prec)$ が整列集合となるようなものが存在する．$\operatorname{card}(\operatorname{ord}(a, \prec))$ を a の**基数** (cardinal number) または**濃度** (cardinality) と呼び，$|a|$ または $\operatorname{card} a$ と表わす．上の (6.1) により，$\operatorname{card} a$ は，順序関係 $\prec$ の選び方によらずに定まる．特に a が n 個の元 ($n\in\omega$) から成る有限集合の場合には，$\operatorname{card} a=n$ である．($\operatorname{card}\phi=|\phi|=0$ である．) 定義および (6.1) から明らかに，

(6.2) $$a \approx b \Leftrightarrow \operatorname{card} a = \operatorname{card} b$$

が成り立つ．

基数 ω を**可算の基数** (countable cardinal number) とも呼び，$\aleph_0$(アレフ 0) とも書く．$\aleph_0$ を基数とする集合のことを**可算無限集合** (countable infinite set) と呼び，自然数または $\aleph_0$ を基数とする集合を**可算集合** (countable set) と呼ぶ．可算無限集合としては，超限順序数 $\omega, \omega\oplus1, \omega\oplus2, \cdots$ などがあったが，ω の真部分集合でも，たとえば $s=\{n\in\omega \mid \exists m(m\in\omega\wedge n=2m)\}$，すなわち偶数全体の集合をとれば，明らかに $s\approx\omega$ であり，s の基数は $\aleph_0$ である．t として，素数全体から成る ω の部分集合をとったらどうだろうか．t が無限集合であることは §3.3 の終りの部分で示された．一方，定理 4.10 によって，t の部分集合 u で，$u\approx\omega$ となるようなものが存在するはずである．このことから，$t\approx\omega$ となることがいえるだろうか．

一般に，集合 a, b に対して，b の部分集合 c で，$a\approx c$ となるようなものが存在するとき，a は b に**支配** (dominate) されるといい，$a\lhd b$ と書くことにしよう．たとえば全射 $f: b\to a$ が存在すれば $a\lhd b$ となる．実際，a を添数集合とする集合 $\{f^{-1}(x)\}_{x\in a}$ を考えれば，選出公理によって，写像 $g: a\to b$ で $g(x)\in f^{-1}(x)$ ($x\in a$) となるものがあり (定理 4.9)，$f\circ g=1_a$ だから g は単射である．ゆえに $a\lhd b$．ここでつぎの補題が成り立つ．

補題 6.1　α を順序数，$s\subset\alpha$ とし，s を α の部分集合として自然に整列集合と考え，$\beta=\operatorname{ord} s$ とすれば，$\beta\subset\alpha$．

証明　$f:s\to\beta$ を s から β の上への順序同型写像としよう．$s=\phi$ のときには補題は明らかに成り立つから，$s\neq\phi$ の場合を考えよう．s の元 x，β の元 $f(x)$ はともに順序数と考えられるから，$x\subset f(x)$ または $f(x)\subset x$ が成り立つ．もしも，$f(x)\subset x$ が任意の s の元 x に対して成り立てば，容易にわかるように，$\beta=f[s]\subset s$ が成り立ち，したがって $\beta\subset\alpha$ がいえる．いま $c=\{x\in s\mid f(x)\supsetneqq x\}\neq\phi$ として矛盾を導こう．$x_0=\min c$ とすれば，$x\subsetneqq x_0$ なる s の元 x に対しては $f(x)\subset x\subsetneqq x_0$，$x\supset x_0$ なる s の元 x に対しては f が順序を保つから $f(x)\supset f(x_0)\supsetneqq x_0$ となり，$x_0\notin f[s]$ となる．一方 $x_0\in f(x_0)$，$f(x_0)\in\beta$ だから $x_0\in\beta$ となり矛盾が導かれた．▌

定理 6.6　集合 a,b に対して，つぎのことが成り立つ．

$$a\lhd b \iff |a|\subset|b|.$$

証明　定義により，全単射 $f:a\to|a|$，$g:b\to|b|$ がある．$|a|\subset|b|$ のときには，$i:|a|\to|b|$ を包含写像とすれば，$g^{-1}\circ i\circ f$ は明らかに a から b への単射だから $a\lhd b$．逆に，単射 $h:a\to b$ があれば，$k=g\circ h\circ f^{-1}$ は $|a|$ から $|b|$ への単射となる．$k[|a|]=s$ は $|b|$ の部分集合だから，上の補題 6.1 により $\beta\subset|b|$ となる順序数 β と順序同型となる．ここで，$|a|\approx\beta$ となるから，$|a|\subset|b|$．▌

系 1　集合 a,b についてつぎの (i), (ii), (iii) は同値である．

(ｉ)　a から b への単射が存在する

(ii)　b から a への全射が存在する

(iii)　$|a|\subset|b|$.

系 2 (Bernstein の定理)　集合 a,b について，$a\lhd b\wedge b\lhd a\Longrightarrow a\approx b$ が成り立つ．

系 3　$a\subset\omega$，しかも a は無限集合ならば，a の濃度は $\aleph_0$ である．

系 4　$a\approx\omega$，b は無限集合のとき，a から b の上への写像が存在すれば $b\approx\omega$ となる．——

基数は，順序数の中の特殊のものであるが，それを $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots$，などの文字で表わすことにしよう．$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ を基数とすれば，$\mathfrak{a}\subsetneqq\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$，$\mathfrak{b}\subsetneqq\mathfrak{a}$ の中のどれか一つ，しかも一つの場合だけが起こる．そこで，$\mathfrak{a}\subsetneqq\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{b}$ と表わすことにしよう．

$n,m\in\omega$ の場合，自然数としての大小関係と，基数としての関係 $\leqq$ とは一致する．

基数の和と積を定義しよう．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を基数とするとき，card$(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b})$ を $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の**和**と呼び，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ と表わす．また card$(\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})$ を $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の**積**と呼んで $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ と表わす．$\mathfrak{a}\approx a$, $\mathfrak{b}\approx b$ とすると，定義により，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathrm{card}(a\oplus b)$，$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathrm{card}(a\times b)$ となる．このことから直ちに，

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{a} \qquad (\text{交換法則})$$

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \qquad (\text{結合法則})$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c} \qquad (\text{分配法則})$$

がそれぞれ成り立つことがわかる．

さらに一般に，集合 I を添数集合とする基数の集合 $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ が与えられたとき，$\mathrm{card}(\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{a}_i)=\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ と書き，これを $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ の**和**(sum)と呼ぶ．$\sum_{i\in 2}\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1$，$\sum_{i\in n}\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_{n-1}$ $(n\in\omega-\{0\})$ は，順序数の場合と同様である．また，このとき，$\mathrm{card}\left(\prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right)=\prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ と書き，これを $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ の**積**(product)と呼ぶ．特に各 $\mathfrak{a}_i$ が或る基数 $\mathfrak{a}$ に等しく，card $I=\mathfrak{i}$ とするとき，$\prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i=\mathrm{card}(\mathrm{Map}(I,\mathfrak{a}))=\mathrm{card}\,\mathfrak{a}^I$ であるが，これを $\mathfrak{a}^{\mathfrak{i}}$ と書き，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{i}$ **乗**，または $\mathfrak{i}$ **べき**(i-th power)と呼ぶ．

上の定義から，つぎの事柄が成り立つことは明らかである．

$$\mathfrak{a}^0=1, \qquad \mathfrak{a}^1=\mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}, \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}, \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}=(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}.$$

問題 6.5　上の事柄を証明せよ．——

$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ と card $\mathfrak{a}^{\otimes\mathfrak{b}}$ の間にはどのような関係があるだろうか．このことについては，つぎの節で述べよう．

§6.4　$\aleph_0$，無限基数

前節で注意したように，n を自然数とすると $\omega\oplus n\approx n\oplus\omega=\omega$ だから，

(6.3)　$$n+\aleph_0=\aleph_0 \qquad (n\in\omega)$$

が成り立つ．また，$n>0$ のとき $\omega\otimes n\approx n\otimes\omega=\omega$ だから，

(6.4)　$$n\aleph_0=\aleph_0 \qquad (n\in\omega-\{0\})$$

となる．$\aleph_0{}^2=\aleph_0\aleph_0$ は $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ の基数であるが，$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への写像 f として，$f(n,m)=2^{n-1}(2m-1)$ となるものをとれば，f は全単射であり，したがって $\aleph_0{}^2=\aleph_0$，さらに，

(6.5)　$$\aleph_0{}^n=\aleph_0 \qquad (n\in\omega-\{0\})$$

が成り立つ．

上に示されたように，$\omega\times\omega\approx\omega$ である．ここで，F を ω から $\omega\times\omega$ への全単射としよう．いま $\{a_n\}_{n\in\omega}$ を各 a_n が ω と対等になるような，ω を添数集合とする集合とし，$A=\bigcup_{n\in\omega}a_n$ とおけば，$A\approx\omega$ となる．実際，各 a_n に対して全単射 $f_n:\omega\to a_n$ が与えられているから，ω から A への写像 G として $F(n)=(x,m)$ のとき $G(n)=f_m(x)$ によって定められるものをとれば，G は全射となる．A は明らかに無限集合だから，定理6.6系4により，$A\approx\omega$ が成り立つ！ 特に a_n として $\omega^{\otimes n}$ をとれば，明らかに $\bigcup_{n\in\omega}\omega^{\otimes n}=\omega^{\otimes\omega}$ であるから，$\mathrm{card}(\omega^{\otimes\omega})=\aleph_0$ である！ したがって，$\omega^{\otimes\omega}=\omega_2$, $\omega^{\otimes\omega_2}=\omega_3$, … もそれぞれ可算無限集合である．また，$\varepsilon_0(=\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}})$ は $\sup\{\omega_n\}_{n\in\omega}$ に等しいから明らかに $\varepsilon_0\subset\bigcup_{n\in\omega}\omega_n$, したがって，上の論法から明らかに $\varepsilon_0\approx\omega$ となる！

問題 6.6　card $\boldsymbol{Q}=\aleph_0$ となることを示せ．［ヒント］$\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\})$ から $\boldsymbol{Q}$ の上への全射が存在すること，および Bernstein の定理を用いるとよい．——

こうして，これまでに得られた無限集合の多くのものが可算無限集合であることがわかった．では，可算無限集合よりも大きな濃度を持つ集合は存在するのだろうか．この問に肯定的に答えるのがつぎの定理である．

定理 6.7(Cantor)　$\mathfrak{a}$ を基数とすると，$\mathfrak{a}<2^{\mathfrak{a}}$.

証明　§2.2で見たように，$\mathcal{P}(\mathfrak{a})\approx 2^{\mathfrak{a}}$ であり，$\mathfrak{a}\lhd\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ は明らかであるから，$\mathfrak{a}$ と $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ が対等ではないことを示せばよい．いま $\mathfrak{a}$ から $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ への全単射 f が与えられたとして矛盾を導こう．$s=\{x\in\mathfrak{a}\mid x\notin f(x)\}$ とおけば，$s\in\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ だから，$f(a)=s$ となるような $\mathfrak{a}$ の元 a が存在する．a は s の元であろうか．$a\in s$ ならば，s の定義によって $a\notin f(a)=s$ だからこれは矛盾である．一方，$a\notin s$ とすれば，$s=f(a)$ だから，再び s の定義により $a\in s$ とならなければならない．こうして，矛盾が導かれた．▌

こうして，任意の基数 $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a}$ よりも大きい基数が存在することがわかった．特に $\aleph_0$ よりも大きな基数を**非可算**(uncountable)の基数と呼び，非可算の基数を持つ集合を**非可算集合**(uncountable set)と呼ぶ．

問題 6.7　A を基数のみから成る集合とすると，A のどの元よりも大きな基数が存在することを示せ．(このことから，基数全体の集まりは，集合ではないことがわかる．)

順序数 α, β について，$\alpha \subset \beta$ ならば，$\beta = \alpha \oplus \gamma$ と書けるような順序数 γ が存在することは，定理 6.5 で示された．したがって，基数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ について $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \gamma$ となるような順序数 γ が存在し，$\mathfrak{c} = \mathrm{card}\,\gamma$ とおけば，$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ となる．したがって，特に $\mathfrak{a}$ が無限基数ならば，$\mathfrak{a} = \aleph_0 + \mathfrak{b}$ となり，$n \in \omega$ に対して $n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ が成り立つ．無限基数については，さらにつぎの命題が成り立つ．

定理 6.8 $\mathfrak{a}$ を無限基数とすれば基数 $\mathfrak{b}$ で $\mathfrak{a} = \aleph_0 \mathfrak{b}$ となるようなものが存在する．

証明 仮定により $\aleph_0 \subset \mathfrak{a}$ である．いま $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ の部分集合 S に対して，S の各元（すなわち $\mathfrak{a}$ の部分集合）の基数が $\aleph_0$ で，$\forall s, \forall t \in S,\ s \neq t \Longrightarrow s \cap t = \phi$ が成り立つとき，S を A 型であるということにし，

$$\tilde{A} = \{S \in \mathcal{P}\mathcal{P}(\mathfrak{a}) \mid S \text{ は A 型}\}$$

とおこう．$\{\aleph_0\} \in \tilde{A}$ だから $\tilde{A}$ は空ではない．$\tilde{A}$ は包含関係に関して順序集合をなし，$\tilde{C}$ を $\tilde{A}$ に含まれる鎖とすれば $\bigcup \tilde{C}$ はその上限になる．したがって $(\tilde{A}, \subset)$ は帰納的順序集合であり，極大元 M を持つ．ここで，$\bigcup M = \tilde{M} \subset \mathfrak{a}$ であるが，$\mathfrak{a} - \tilde{M}$ は有限集合である．（実際 $\mathfrak{a} - \tilde{M}$ が無限集合ならば，$\mathfrak{a} - \tilde{M}$ の部分集合 N で $\aleph_0$ を基数とするものがあり，$M' = M \cup \{N\} \in \tilde{A}$ となって，M の極大性に反する．）一方，$\tilde{M}$ は無限集合であり，$\mathrm{card}\,\tilde{M} = \aleph_0\,\mathrm{card}\,M$ だから，$\mathfrak{a} = \mathrm{card}\,\tilde{M} + \mathrm{card}(\mathfrak{a} - \tilde{M}) = \mathrm{card}\,\tilde{M} = \aleph_0\,\mathrm{card}\,M$. ∎

系 $\mathfrak{a}$ は無限基数 $\Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

問題 6.8 $\mathfrak{a}$ を無限基数，$\mathfrak{b}$ を基数とするとき，つぎのことが成り立つことを示せ．

(i) $0 < \mathfrak{b} \leqq \aleph_0 \Longrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$

(ii) $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a} \Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

定理 6.9 $\mathfrak{a}$ を無限基数とすると，$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ となる．

証明 $\aleph_0 \subset \mathfrak{a}$ であるが，$\aleph_0{}^2 = \aleph_0$ となることはすでに見た．いま $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ から $\mathfrak{a}$ への対応 f に対して，$\mathfrak{a}$ の部分集合 s で，$f \subset (s \times s) \times s$，しかも $f|_{s \times s}$ が $s \times s$ から s への全単射となっているようなものが存在するとき f を B 型であると呼ぼう．さらに，

$$\mathcal{F} = \{f \subset (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{a} \mid f \text{ は B 型}\}$$

とおけば，$\aleph_0 \times \aleph_0 \approx \aleph_0$ より $\mathcal{F}$ は空ではない．$(\mathcal{F}, \subset)$ は順序集合であり，$\mathcal{F}$

の中の鎖は上限を持つことは容易にわかるから，極大元 f_0 が存在する．f_0 の像を M としよう．すると，$M\times M\approx M$ であるから，$M\approx\mathfrak{a}$ を示せば十分である．$M\subset\mathfrak{a}$ だから $\mathrm{card}\,M<\mathfrak{a}$ として矛盾を導けばよい．$\mathfrak{a}=\mathrm{card}\,M+\mathrm{card}(\mathfrak{a}-M)$ であり，$\mathfrak{a}$ は $\mathrm{card}\,M$ と $\mathrm{card}(\mathfrak{a}-M)$ の大きい方に等しい(問題 6.8)から，仮定により $\mathfrak{a}=\mathrm{card}(\mathfrak{a}-M)$ である．したがって，$\mathfrak{a}\approx\mathfrak{a}-M$，ゆえに $M\lhd\mathfrak{a}-M$ となり，$\mathfrak{a}-M$ の部分集合 N で M と対等なものが存在する．ここで，$M\times N$, $N\times M$, $N\times N$ を考えれば，これらはそれぞれ $M\times M$ と対等であり，M についての仮定により $M\times M\approx M\approx N$ だから，

$$(M\cup N)\times(M\cup N)=M\times M\cup M\times N\cup N\times M\cup N\times N\approx N\approx M\cup N$$

となり，f_0 を真部分集合として含む B 型対応が存在することになる．これは f_0 の極大性に反する！ ▌

問題 6.9　$\mathfrak{a}$ を無限基数，$\mathfrak{b}$ は基数で $0<\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ となるものとすると，$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ となることを示せ．

問題 6.10　$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ を 0 よりも大きい基数とし，それらのうち少なくとも一方が無限基数ならば，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ となることを示せ．また，$\mathfrak{a}$ が無限基数，$n\in\omega$ ならば $\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}$ となることを示せ．

定理 6.10　$\mathfrak{a}$ を無限基数，$\mathfrak{b}$ は基数で $2\leqq\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ となるものとすれば，$2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$.

証明　$2^{\mathfrak{a}}\leqq\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ は明らかに成り立つから，$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}\leqq 2^{\mathfrak{a}}$ を示せば十分である．ところが，$\mathfrak{b}\leqq 2^{\mathfrak{b}}$ より，$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}\leqq(2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ だが，$\mathfrak{b}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ だから，$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}\leqq 2^{\mathfrak{a}}$ である．▌

こうして，${\aleph_0}^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ となることがわかった．$2^{\aleph_0}>\aleph_0$，$\omega^{\otimes\omega}\approx\aleph_0$ だから，ω^{ω} と $\omega^{\otimes\omega}$ とは全く別のものである．これまでに述べたことから，$\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間には非常に大きなギャップがあることが感じられよう．$\boldsymbol{N},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}$ それに多くの超限順序数はみな可算無限集合であった．ところが，つぎの定理で示されるように，$\boldsymbol{R}$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ である．

定理 6.11
$$|\boldsymbol{R}|=2^{\aleph_0}.$$

証明　§4.1 で $\boldsymbol{R}$ を構成した方法から見られるように，$\boldsymbol{Q}^{\omega}$，すなわち有理数の数列全体の集合の部分集合である有理 Cauchy 列全体の集合 C から $\boldsymbol{R}$ への全射が存在する．$|\boldsymbol{Q}|=\aleph_0$ だから，$|C|\leqq{\aleph_0}^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$，ゆえに，$|\boldsymbol{R}|\leqq 2^{\aleph_0}$ である．したがって，$2^{\aleph_0}\leqq|\boldsymbol{R}|$ を示せば十分である．

$k\in\omega$ に対して $a_k=0,1$ とするとき，数列 f で $f(n)=\sum_{k=0}^{n}a_k/3^k$ によって与え

られるものは Cauchy 列である．$\lim f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k/3^k$ と書けば，これは実数である．いま $\varphi\in 2^\omega$ に対して $r_\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)/3^k$ とおけば，φ を r_φ へ写す写像 $r:2^\omega\to\boldsymbol{R}$ が得られる．r が単射であることを示せば，$2^\omega\triangleleft\boldsymbol{R}$ すなわち $2^{\aleph_0}\leqq|\boldsymbol{R}|$ が得られる．

$\varphi,\psi\in 2^\omega$ に対し，$r_\varphi=r_\psi$ としよう．$\varphi(k)\neq\psi(k)$ となるような自然数 k が存在するとし，そのような k の中の最小のものを n としよう．ここで，$\varphi(n)=1$, $\psi(n)=0$ としてもよい．

$$r_\varphi-r_\psi=1/3^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}(\varphi(k)-\psi(k))/3^k=0$$

であるが，$-1\leqq\varphi(k)-\psi(k)$ だから，

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty}1/3^k=-(1/3^{n+1})/(1-1/3)=-1/2\cdot 3^n\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}(\varphi(k)-\psi(k))/3^k,$$

したがって，$1/3^n-1/2\cdot 3^n=1/2\cdot 3^n\leqq r_\varphi-r_\psi=0$ となり，これは矛盾である．したがって，$\varphi=\psi$，すなわち r は単射となることが示された．▌

$2^{\aleph_0}$ は**連続の濃度** (cardinality of continuum) と呼ばれる．

問題 6.11 (i) a,b を実数，$a<b$ とするとき，$\{x\in\boldsymbol{R}\mid a<x<b\}$ は連続体の濃度を持つことを示せ．

(ii) $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}$ (n 個の直積) の濃度は $2^{\aleph_0}$ となることを示せ．——

$\aleph_0$ は無限基数の中で一番小さいものである．一般に，無限基数 $\mathfrak{a}$ が与えられたとき，$c(\mathfrak{a})=\{\mathfrak{b}\in\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b}$ は無限基数$\}$ とおけば，$c(\mathfrak{a})$ は整列集合 $\mathfrak{a}$ の部分集合だから，包含関係に関して明らかに整列集合となり，順序数 α で $(c(\mathfrak{a}),\subset)\simeq\alpha$ となるようなものが確定する．(たとえば，$\mathfrak{a}=\aleph_0$ とすれば $c(\mathfrak{a})=\phi$ だから $\alpha=0$ となる．) このとき，$\mathfrak{a}=\aleph_\alpha$ と書く．$\aleph_1$ は，無限基数で，それよりも小さい無限基数としては $\aleph_0$ のみを許すようなもの，すなわち，'2 番目に大きい無限基数' である．$\aleph_0<2^{\aleph_0}$ だから，$\aleph_0<\aleph_1\leqq 2^{\aleph_0}$ となるが，$\aleph_1<2^{\aleph_0}$ だろうか．もしもそうならば，$\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{R}$ の間にある集合 S，すなわち $\boldsymbol{N}\subsetneqq S\subsetneqq\boldsymbol{R}$ となるようなもので，$\aleph_0<|S|<2^{\aleph_0}$ となるようなものが存在する筈である．Cantor は "(Euclid) 空間の無限点集合は可算か連続の濃度をもつかのいずれかである" という命題が証明できると考えた．これは，$\aleph_1=2^{\aleph_0}$ であるという命題と同値である．この命題 "$\aleph_1=2^{\aleph_0}$" は**連続体仮説** (continuum hypothesis) と呼ばれる．また，α を順序数とするとき，命題 "$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$" を**一般連続体仮説** (general continuum hypothe-

sis)という．これらについては，つぎの章でさらに述べよう．

終章　ZF 集合論，選出公理，連続体仮説

§1　ZF 集合論，選出公理，連続体仮説

α を任意の順序数とするとき，$\alpha \in \alpha^+ \in (\alpha^+)^+ \in \cdots$ となり，この列はいくらでも続けることができる．しかし，α から‘左へ’この列をいくらでも延ばすことはできない．たとえば，$\alpha=2$ とすれば，$0 \in 1 \in 2$ となり，この列をこれ以上‘左へ’延ばすことはできない．一般に，α を任意の順序数とするとき，α に含まれる元 β で，“$\gamma \in \beta \Longrightarrow \gamma \notin \alpha$” を成り立たせるようなものがある．実際 $\beta=0$ とすればよい！　このような状況がより一般的に成り立つであろうことを主張するのがつぎの公理である．

S 10)（正則性の公理）　$\forall a[a \neq \phi \Longrightarrow \exists b(b \in a \wedge a \cap b=\phi)]$.

すなわち，“空ではない集合 a に対して，その元 b で，b のいかなる元も a には含まれないものが存在する”．

たとえば，x として任意の集合をとり，$a=\{x\}$ とおけば，a の元は x のみであるから，正則性の公理によれば，$\{x\} \cap x=\phi$ となり，したがって $x \notin x$ が成り立つ．こうして正則性の公理を仮定すれば，集合がそれ自身を元として含むことはないのである．

さて，Zermelo-Fraenkel の公理系とは，これまでに述べた公理 S 1)-S 10) をさす．公理のそれぞれがどのような‘必然性’(または‘必要性’)を持つかを示すために，これら 10 個の公理について，やや‘間延び’した書き方で述べて来たが，実は，公理系としては上の 10 個の公理の中には無駄があり，空集合の存在を述べた S 2) および，分出公理 S 6) は，他の諸公理からそれぞれ定理として導かれるのである．

実際，空集合の存在 S 2) は，無限公理 S 5) および分出公理 S 6) から，つぎのようにしてすぐ導かれる．S 5) によって，集合として，無限系譜 a なるものが存在することが保証されるが，S 6) によって，$a-a=\{x \in a \mid x \notin a\}$ が存在し，$a-a=\phi$ となるから空集合の存在がいえる．

分出公理 S 6) が，S 2) を含む他の諸公理から導かれることを示すために，S 6) を用いずにつぎの補題を示そう．

補題 1　集合 a が元 x を含むとき，a の部分集合 b で，

$$t \in b \Leftrightarrow t \in a \wedge t \neq x$$

を満たすものが存在する．

証明　$a=\{x\}$ のとき，$b=\phi$ とすればよい．$a \ni y$, $y \neq x$ としよう．ここで命題 $P(s,t)$ として，

$$(s \in a \wedge s \neq x \Longrightarrow t=s) \wedge (s=x \Longrightarrow t=y)$$

というものをとろう．すると置換公理 S 9) によって集合 b で，

$$t \in b \Leftrightarrow \exists s(s \in a \wedge P(s,t))$$

を成り立たせるようなものが存在する．この b は明らかに補題の条件を満たす．▌

上の補題で存在することを示された集合 b を，$a-\{x\}$ と書こう．(いま，分出公理は仮定していないので，集合の‘差’を一般的に定義することはできない.)

さて，a を集合，$P(x)$ を x を自由変数とする命題とするとき，集合 c で，

(1)　$$x \in c \Leftrightarrow x \in a \wedge P(x)$$

を満たすようなものが存在することを示せば，分出公理が成り立つことがいえる．いま，x, y についての命題 $Q(x,y)$ として，

$$(x \in a \wedge P(x) \Longrightarrow y=x) \wedge (x \in a \wedge \neg P(x) \Longrightarrow y=a)$$

なるものをとろう．置換公理によって，集合 b で

(2)　$$y \in b \Leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge Q(x,y))$$

を満たすようなものが存在する．b の元 y は，a の元 x で $P(x)$ を成り立たせるものか，あるいは a 自身である．もしも a の任意の元 x について $P(x)$ が成り立つならば，明らかに $b=a$ となり，このとき，上のような c としては a 自身をとればよい．もしも，a の元 x で $\neg P(x)$ となるようなものがあれば，そのような x に対して，命題 $Q(x,a)$ が成り立つから，$a \in b$ である．ここで，$c=b-\{a\}$ とおけば，c の元はすべて a の元 x で $P(x)$ を成り立たせ，また a の元 x で $P(x)$ を満たすようなものがあれば，正則性の公理によって x は a 自身ではあり得ないから，c の元となる．すなわち c は求める集合である．こうして，分出公理が，他の諸公理から定理として得られることがわかった．

以後，Zermelo-Fraenkel の公理系というときには，外延性公理，空集合の存

在公理，非順序対の存在公理，合併集合の公理，無限公理，べき集合の公理，選出公理，置換公理，正則性の公理の九つの公理を意味するものとする．このなかで，選出公理については特に議論が多く，その妥当性について疑わしいとする主張もあるので，上の9公理から選出公理を除いたものを ZF 集合論の体系，または単に ZF といい，ZF に選出公理を付け加えたものを ZFC と呼ぶ．

Gödel は1938年に，“ZF 集合論が無矛盾ならば，それに選出公理および一般連続体仮説を付け加えた体系も無矛盾である”という命題を証明した！ところが，1963年に P. Cohen によって，“ZF 集合論が無矛盾ならば，それに選出公理の否定を付け加えた体系も無矛盾である”という命題が証明された．すなわち，ZF 集合論が無矛盾ならば，選出公理も，その否定も，ZF の体系の中の定理としては得られないのである．さらに，Cohen は，“ZFC が無矛盾ならば，それに連続体仮説の否定を付け加えた体系も無矛盾である”ということを証明した！こうして，連続体仮説が‘正しいか否か’は，ZFC の体系のみによっては判定することはできないのである！

実は，これより以前1931年に Gödel によって得られた不完全性定理によれば，ZF にどのような公理系を付け加えても，そうして得られた体系が無矛盾ならば，論理的命題 P で，P も $\neg P$ もその体系によっては証明不可能なものが存在するのである．

公理的集合論が生まれて来たゆえんとして，序章にも述べたような集合論のパラドックスがあるが，それ以前に，非 Euclid 幾何学の発見などによる図形や数の理論の基礎を問題にしなければならなくなったこと，さらに20世紀に入ってから見られた‘数学の基礎の危機’があった．あくまでもあいまいさを避けるために，極端なまでに形式化された ZF 体系から，自然数，整数，有理数，実数などの‘古典的’諸概念が再構成されることは，本講で述べた通りである．（もっとも，こうした構成方法は，本講で述べたものの他にもいろいろあり得る．特に，有理数から実数を構成する方法として，本講では Cantor によるものをとったが，普通は Dedekind によるものがよく用いられる.）こうして，抽象的 ZF 集合論から，“経験的によく知られた”自然数などの諸概念が構成されるということは，或る意味では，ZF 集合論の妥当性を示すものといえるかも知れない．また，自然数などに比べて具体性からは一層かけ離れた ZF 集合論は，数学のすべての分

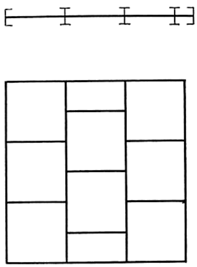
野に関連し，現代数学における‘用語法’を提供するようになった．しかし，Gödel や Cohen の結果を顧みるとき，この体系が，果して‘妥当’なものであるか否かについては，依然として問題が残されている．

本書では，集合論の今日的諸問題にはふれる余裕がなかったが，自然数，有理数，実数などの数学的‘常識’とされているような事柄を Zermelo-Fraenkel の集合論の立場からとらえ返し，そのなかで，これも‘常識’となりつつある集合の基礎概念のいろいろなものに光を当てて見ることを試みた．‘集合論プロパー’の諸問題は数学基礎論の立場から今日も盛んに研究されているが，それらについては専門書を参照されたい．

第Ⅱ部　位　　相

序章　位相空間論の成立

第I部でも見たように，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ とは互いに相等しい濃度を持つ(第I部§6.4問題6.11(ii))．そのことから，すぐ線分と正方形とが相等しい濃度を持つことが導かれる．最初に(1878年)この事実を見出したCantorにとっても，これは意外なことであったようである．この発見に続いて，Peanoは与えられた正方形を埋めつくす‘曲線’があることを発見した(1890年)．写像の用語によれば，Cantorは線分から正方形への全単射が存在することを示し，Peanoは線分から正方形の上への‘連続’な写像が存在することを示したのである．こうして，それまではほとんど自明のものとされていた‘次元’の概念を，より厳密なものとすることが必要であることがわかった．Euclid空間 $\boldsymbol{R}^n$ に含まれる‘コンパクト’な(すなわち‘有界’で‘閉じた’)部分集合 K の次元 $\dim K$ の定義はつぎのように与えられる．(Poincaré 1912, Brouwer 1913, Lebesgue 1921.) 任意の正数 ε に対して，K を覆いつくす有限個の，それぞれの直径が ε を越えない閉集合の集まりを適当にとって，それらによって K の各点が $m+1$ 回以上は覆われないようにすることができれば，$\dim K\leqq m$ とし，$\dim K\leqq m$ かつ $\dim K\leqq m-1$ の否定が成り立つならば，$\dim K=m$ とするのである．(閉集合，コンパクト集合，閉集合の直径などの定義については，後に述べる.) この定義



によれば，線分が1次元であり，正方形が2次元であることなどが示され(図参照)，さらに，Euclid 空間に含まれるコンパクトな K, K' に対して，K を K' へ写す‘連続’な全単射が存在すれば $\dim K = \dim K'$ となることが証明される．

このように，線分と正方形とは，集合としては対等であるが，それらの‘位相的’構造を考えに入れれば，それらは重要な差違を持つのである．

次元が位相的に不変であることを証明するために，Brouwer が用いた方法は，その後発展して代数的位相幾何学においても用いられるようになったが，本講においてはその方面のことには立ち入らず，より一般的な立場から，‘空間’の位相についての理論，すなわち，‘集合論的位相幾何学’または‘一般位相幾何学’と呼ばれる方面のことを述べることにする．

Euclid 空間に含まれる任意の集合についての位相幾何学的研究は，Cantor に始まる．今日の位相幾何学において基本的な概念である，集積点，内点，外点，境界点，閉集合，開集合などは，みな Cantor によって考えられている(1870年以降の諸論文)．これらの諸概念は，どれも空間内の点同士が‘近い’または‘遠い’という関係が適当に定義されれば自然に定義されることであり，考える‘空間’を Euclid 空間に限る必要はない．たとえば，区間 $I=[0,1]$ で有界な実数値関数全体の作る集合 S を考え，それに含まれる $f(x), g(x)$ $(x \in I)$ の‘近さ’を，$\sup_{x \in I} |f(x)-g(x)|$ によって‘測る’こともできよう．また S に含まれる関数の中で，Riemann 積分可能なもののみから成る‘空間’X を考え，その空間の点，すなわち Riemann 積分可能な有界関数 $f(x)$ に，積分 $\int_I f(x)\,dx$ を対応させることによって，X から $\boldsymbol{R}$ への写像が得られるが，これは‘連続’であろうか？　このような，‘関数空間’に関する位相的な諸問題を考える中で，Cantor の考えをさらに推し進めて‘距離空間’の概念を導入したのは Fréchet であった(1905年)．‘距離空間’X においては，それに属する2点間の‘距離’が確定し，それによって2点が‘近い’か否かを判定することができ，1点の‘近傍’，‘開集合’，‘閉集合’などの概念が自然に定義される．そして，空間 X の位相的な諸性質は，‘近傍’，‘開集合’，‘閉集合’などが持っているいくつかの簡単な性質から導かれることが多い．‘近傍’が持つ性質を整理して四つの公理の形にまとめ上げ，それを用いて‘位相空間’の概念を定義したのは，Hausdorff である(1914年)．これによって，距離空間は‘位相空間’の特別なものとして扱われるようになり，位相幾何学はより

抽象的になるとともに，それによって扱われる‘空間’の範囲はさらに広くなった．Hausdorff によって定義された‘位相空間’は，今日‘Hausdorff 空間’と呼ばれる．Hausdorff による位相の理論は Kuratowski (1933年) らによって，さらに整理され‘閉包の公理’から出発した理論として体系づけられた．Bourbaki が採用したように，閉集合または開集合の族，あるいはフィルターを用いて体系づける方法もある．Hausdorff 空間は，位相空間の一つであるが，Hausdorff の公理を満たさない位相空間にも，代数幾何学で用いられる，Zariski 位相を持つ空間など，重要なものがある．位相についての諸理論は，群，環，体の理論，線型代数学や解析学の理論などとともに，現代数学にとって基本的な重要性を持つものとなった．集合論の場合と同様に，位相的諸概念とその基本的用語は，現代数学の各分野で用いられている．そのような基本的諸概念，諸理論について説明することが本講の目的である．第I部では，予備知識は仮定しなかったが，以下の第II部では，集合論，群，環，体，線型代数学などの基本的事柄については既知であると仮定して，話を進める．

位相空間論については数多くの書物があるが，本書を書くにあたってとくにつぎの書を参考にした．

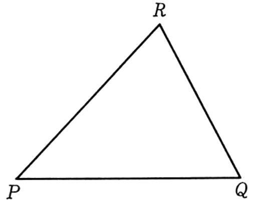
河田敬義，三村征雄：現代数学概説 II，岩波書店

J. L. Kelley: General Topology, van Nostrand.

第1章 距離空間

§1.1 距離空間

平面上の2点 P, Q が与えられたとき，線分 PQ の長さを P, Q の‘距離’ということは，日常的にも行われている．平面のかわりに，球面や，あるいはもっと複雑な曲面 S をとっても，その上の2点 P, Q の‘距離’を P, Q を結ぶ曲面 S に含まれる曲線の長さの最小のものというようにして定義できることもある．そのような場合にも，S の上の2点の‘距離’は，平面上の2点の距離と似たいくつかの性質を持っている．たとえば，P, Q, R を S の上の点とするとき，P, Q の‘距離’が，P, R の‘距離’と R, Q の‘距離’の和を越えることはない(図参照)．この



事柄は，“距離が三角不等式を満たす”というように表わされる．空間がいくつかの島のような部分に分かれていて，2点を結ぶ‘曲線’がつねにあるとは限らない場合にも，2点 P, Q の‘距離’として P, Q に適当な数 $d(P, Q)$ を対応させ，それが三角不等式などいくつかの性質を満たすようにすることができることがある．このような考えに基づいて，つぎの定義が与えられる．

X を集合，d を直積 $X\times X$ から $\boldsymbol{R}$ への写像で，つぎの (i)-(iii) を満たすものとする．

(i) $X\times X$ の任意の元 (x, y) に対して $d(x, y)\geqq 0$．さらに，命題

(M) $$x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \qquad (x, y \in X)$$

が成り立つ

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad (x, y \in X)$

(iii) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) \quad (x, y, z \in X)$.

このとき，順序対 (X, d) を**距離空間** (metric space) と呼び, X に**距離** (distance) または**計量** (metric) d が与えられたという．X を距離空間 (X, d) の**台** (support) というが，d の与え方がわかっている場合，略式に単に X を距離空間ということもしばしばある．d は X で定義された**距離関数** (distance function) と呼ばれ，X の元は距離空間の**点** (point) と呼ばれる．X の点 x, y に対して，$d(x, y)$ を x, y の**距離**と呼ぶ.

上の (i), (ii), (iii) が**距離空間の公理**である．特に (iii) の式は**三角不等式**と呼ばれる.

上の条件 (i) において，命題 (M) を，それよりも弱い命題

(P) $\quad x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0 \quad (x, y \in X)$

で置き換えたとき，(X, d) または X は**擬距離空間** (pseudo-metric space) と呼ばれ，$d(x, y)$ は点 x, y の**擬距離** (pseudo-distance) と呼ばれる.

X として $\boldsymbol{R}$ をとり，その元 x, y に対して $d(x, y) = |x-y|$ とおいて写像 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ を定義すれば，d は明らかに条件 (i), (ii) を満たす．また，$\boldsymbol{R}$ の元 x, y, z に対して $x-z = (x-y) + (y-z)$ が成り立つから，d は三角不等式をも満たすのである．こうして，$(\boldsymbol{R}, d)$ は距離空間となることがわかった.

つぎに，S を任意の集合とするとき X として S から $\boldsymbol{R}$ への‘有界’写像全体から成る集合を考えよう．S から $\boldsymbol{R}$ への写像 f が**有界** (bounded) であるとは，S のどのような元 x に対しても $|f(x)| \leqq a$ となるような実数 a が存在することを意味する．ここで，X の元 f, g に対して，x を S の中で動かしたときに $|f(x) - g(x)|$ を考えれば，これは明らかに有界であるから上限を持つ．いま，$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|$ とおけば，(X, d) は距離空間となる.

問題 1.1 上のことを確かめよ．——

$X = \boldsymbol{R}^2$ の場合について考えよう．X の元 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して，$d(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ とおいて写像 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ を定めると，d が距離の公理の条件 (i), (ii) を満たすことは自明である．d が三角不等式をも満たすことはよく知られているし，それを直接証明することも容易だが，ここではわざと少しまわり道を通ってこのことを証明しよう．$\boldsymbol{R}^2$ の元 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1,$

y_2) に対して $x-y=(x_1-y_1, x_2-y_2)$ とおくと，d の定義から明らかに $d(x,z)=d(x-y, z-y)$ $(x, y, z \in \boldsymbol{R}^2)$ が成り立つ．特に，$d(x,z)=d(x-z, (0,0))$ となる．一般に，$d(x,(0,0))^2=Q(x)$ とおこう．$x=(x_1, x_2)$ のとき $Q(x)=x_1{}^2+x_2{}^2 \geqq 0$ となる．d が三角不等式を満たすことを示すためには，

$$(*) \qquad Q(x-z)^{1/2} \leqq Q(x-y)^{1/2}+Q(y-z)^{1/2} \qquad (x, y, z \in \boldsymbol{R}^2)$$

が成り立つことを示せばよい．そのためには，

$$(**) \qquad Q(u+v) \leqq Q(u)+Q(v)+2Q(u)^{1/2}Q(v)^{1/2} \qquad (u, v \in \boldsymbol{R}^2)$$

が成り立つことがいえればよい ((＊) で $x-y=u$, $y-z=v$ とおけば，(＊) と (＊＊) は同値になる)．ここで，$Q(u+v)-Q(u)-Q(v)=2B(u,v)$ とおこう．$u=(u_1, u_2)$，$v=(v_1, v_2)$ のとき，$B(u,v)=u_1v_1+u_2v_2$ となる．また，$Q(u)=B(u,u)$ である．さて，任意の実数 λ に対して，$Q(\lambda u)=\lambda^2 Q(u)$，$B(\lambda u, v)=\lambda B(u,v)$ だから，

$$(\#) \qquad Q(\lambda u+v) = \lambda^2 Q(u)+2\lambda B(u,v)+Q(v) \qquad (u, v \in \boldsymbol{R}^2)$$

となる．さらに，$Q(\lambda u+v) \geqq 0$ が λ $(\in \boldsymbol{R})$ の選び方によらずに成り立つから，上の λ についての2次式の判別式 $B(u,v)^2-Q(u)Q(v) \leqq 0$ となる．($Q(u) \neq 0$ のときに考えればよい.) こうして (＊＊) が証明される．

こうして，$(\boldsymbol{R}^2, d)$ が距離空間となることが示されたが，上で用いられた方法は，次節で述べるようにより一般化され，いろいろな距離空間の例を見出すためにも使われる．

§1.2　2次形式と計量

V を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間，B を $V \times V$ から $\boldsymbol{R}$ への写像とする．$\boldsymbol{R}$ の任意の元を $a, b, \cdots$，V の任意の元を $u, v, \cdots$ と表わすとき，つぎの (i)-(iii) が成り立てば，B は V 上の**対称双1次形式** (symmetric bilinear form) と呼ばれる．

(i)　$B(u,v) = B(v,u)$

(ii)　$B(u+v, w) = B(u,w)+B(v,w)$

(iii)　$B(au, v) = aB(u,v)$.

ここで，$Q(u)=B(u,u)$ とおけば，$Q(au)=a^2Q(u)$，$Q(u+v)-Q(u)-Q(v)=2B(u,v)$ がともに成り立つ．こうして定まる写像 $Q: V \to \boldsymbol{R}$ を，V 上の B の**同伴2次形式** (associated quadratic form) と呼ぶ．

一般に，写像 $Q: V \to \boldsymbol{R}$ が与えられ，つぎの条件 (iv), (v)

(iv) $Q(au) = a^2Q(u)$

(v) 写像 $B: V \times V \to \boldsymbol{R}$ を $Q(u+v) - Q(u) - Q(v) = 2B(u, v)$ によって定めれば，B は V の上の対称双1次形式となる

がともに満たされるとき，Q を V の上の**2次形式** (quadratic form) と呼び，B を Q の**同伴対称双1次形式** (associated symmetric bilinear form) と呼ぶ．このとき，(v) で $u=v$ とおけば明らかなように $Q(u)=B(u, u)$ となる．

例 1.1 V を $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ をその ($\boldsymbol{R}$ 上の) 基底とする．V の元 $x=\sum x_i u_i$，$y=\sum y_i u_i$ $(x_i, y_i \in \boldsymbol{R})$ に対し，$B(x, y) =\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とおけば，B は明らかに対称双1次形式であり，$\boldsymbol{R}^n$ の**内積** (inner product) と呼ばれる．Q を B の同伴2次形式とすれば，$x=\sum x_i u_i$ に対し，$Q(x) =\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ となる．

例 1.2 V は例1.1の通りとし，$x=\sum x_i u_i$，$y=\sum y_i u_i$ に対して，$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$ (ただし $a_{ij} \in \boldsymbol{R}$，$a_{ij}=a_{ji}$) によって B を定めると，B は対称双1次形式となることが容易に確かめられる (読者自ら確かめられたい)．特に，$a_{ij}=0$ $(i \neq j)$ の場合は $B(x, y) =\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$ $(a_i=a_{ii})$ となり，この場合には同伴2次形式 Q は，$Q(x) =\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ によって与えられる．ここで，特に $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ とすると，例1.1の B, Q が得られる．

例 1.3 a, b を実数，$a<b$ とし，$[a, b]$ を閉区間 $\{t \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq t \leqq b\}$ とする．閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値関数 $f(t)$ をとり，特に $f(t)^2$ が $[a, b]$ で Riemann 積分可能であるような $f(t)$ 全体の集合を $S_2(a, b)$ と書くことにする．$S_2(a, b)$ の元 f，$\boldsymbol{R}$ の元 α に対して，$(\alpha f)(t) =\alpha(f(t))$ とおいて αf を定めれば，明らかに $\alpha f \in S_2(a, b)$ となる．また，$f, g \in S_2(a, b)$ に対し，$(f+g)(t) =f(t) +g(t)$ とおいて $f+g$ を定めると，$f+g$ も $S_2(a, b)$ の元となる．(実際，$((f+g)(t))^2 = (f(t)+g(t))^2 \leqq 2(f(t)^2+g(t)^2)$ $(t \in [a, b])$ だから，このことは明らかである.) こうして $S_2(a, b)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となる．ここで，$S_2(a, b)$ の元 f に対し，$Q(f) = \int_a^b f(t)^2 dt$ とおいて Q を定めれば，これは $S_2(a, b)$ 上の2次形式となる．B を Q の同伴対称双1次形式とすれば，$S_2(a, b)$ の元 f, g に対して，$B(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$ となる．——

ベクトル空間 V 上の2次形式 Q が与えられたとき，V の任意の元 u に対して，$Q(u) \geqq 0$ が成り立つならば，Q を**正の半定符号形式** (positive semi-definite

form) と呼び，もしもさらに，$Q(u)=0 \Leftrightarrow u=0$ (零ベクトル) が成り立つならば Q を**正の定符号形式** (positive definite form) と呼ぶ．上の例 1.2 の場合，特に 2 次形式 Q が $Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ によって与えられる場合には，Q が正の半定符号形式であるためには $a_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ となることが必要十分であり，特に，$a_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ のときには，Q は正の定符号形式である．例 1.1 で与えられた 2 次形式 Q は正の定符号形式である．例 1.3 で与えられた 2 次形式 Q も，$Q(f)=0$ のとき f を零関数と '同一視' すれば，正の定符号形式である．

V をベクトル空間，Q を V 上の正の半定符号形式とする．また，B を Q の同伴対称双 1 次形式とする．ここで，u, v を V の元，λ を任意の実数とするとき

$$Q(\lambda u+v) = \lambda^2 Q(u) + 2\lambda B(u, v) + Q(v) \geqq 0$$

が成り立つから，前節と同様の考え方によって

$$B(u, v)^2 \leqq Q(u) Q(v) \qquad (u, v \in V) \tag{1.1}$$

が成り立つことがわかる．また，Q が正の定符号形式のときには

$$Q(\lambda u+v) = 0 \Leftrightarrow \lambda u+v = 0$$

となるから，(1.1) で等号が成り立つのは，u, v の一方が他方のスカラー倍となるとき，またそのときだけである．(Q が正の定符号形式のとき (1.1) を証明するには，つぎのようにしてもよい．λ, μ を任意の実数とするとき，

$$Q(\lambda u+\mu v) = \lambda^2 Q(u) + 2\lambda\mu B(u, v) + \mu^2 Q(v) \geqq 0$$

となる．ここで，$\lambda=Q(v)$，$\mu=-B(u, v)$ とおくと，

$$\begin{aligned} Q(v)(Q(u)Q(v) - 2B(u, v)^2 + B(u, v)^2) &= Q(v)(Q(u)Q(v) - B(u, v)^2) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．

$$Q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

だから，$Q(v)=0$ ならば (1.1) は成り立ち，$Q(v) \neq 0$ ならば $Q(v)>0$ だから，上式からやはり (1.1) が導かれる．) 例 1.1 の場合には (1.1) からつぎの **Cauchy-Schwarz の不等式**が得られる．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad (a_i, b_i \geqq 0). \tag{1.2}$$

また，例 1.3 の Q に (1.1) を適用すれば，つぎの **Schwarz の不等式**が得られる．

$$(1.3)\qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx\int_a^b g(x)^2dx \qquad (f, g \in S_2(a, b)).$$

さて，V をベクトル空間，Q を V 上の正の半定符号形式とし，V の元 u, v に対して，$d_Q(u, v)=Q(u-v)^{1/2}$ とおいて写像 $d_Q: V\times V\to \boldsymbol{R}$ を定義しよう．ここで，x, y, z を V の元，$u=x-y$，$v=y-z$ とおくと，不等式 (1.1) より

$$Q(u+v) \leqq Q(u)+Q(v)+2Q(u)^{1/2}Q(v)^{1/2}$$

が導かれ，したがって，

$$d_Q(x, z) \leqq d_Q(x, y)+d_Q(y, z)$$

が成り立つ．このことから，$d_Q(x, y)$ が V の元 x, y の擬距離となることは明らかである．特に Q が正の定符号形式ならば，d_Q は V で定義された距離関数となる．d_Q を'2次形式 Q によって定められる計量'と呼ぼう．

$$V = \boldsymbol{R}^n,$$

$$u_1 = (1, 0, \cdots, 0),\quad u_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\quad \cdots,\quad u_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

とし，V 上の正の定符号形式 Q を，V の元 $x=\sum_{i=1}^n x_iu_i$ に対して $Q(x)=\sum_{i=1}^n a_ix_i^2$ $(a_i>0)$ とおいて与え，この Q によって定まる V の距離関数を $d_{(a_1,\cdots,a_n)}$ と表わそう．$(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1,\cdots,a_n)})$ は距離空間となる．特に $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ のとき $d_{(a_1,\cdots,a_n)}$ を単に d と書いて **Euclid 計量** (Euclidean metric) と呼び，$(\boldsymbol{R}^n, d)$（または単に $\boldsymbol{R}^n$）を n 次元 **Euclid 空間** (Euclidean space) と呼ぶ．$\boldsymbol{R}^n$ の点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ に対して，$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$ となる．

一方，$S_2(a, b)$ の元 f, g に対して，

$$d(f, g) = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx\right)^{1/2}$$

とおけば，d は距離関数となる．($d(f, g)=0$ のとき f と g を'同一視'する.)

問題 1.2　$(\boldsymbol{R}^2, d_{(a,b)})$ $(a, b>0)$ において，

$$\{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid d_{(a,b)}(x, \boldsymbol{0})=1\} \qquad (\boldsymbol{0}=(0, 0))$$

は，楕円となることを示せ．

問題 1.3　写像 $d: \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を，$\boldsymbol{R}^n$ の元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ に対して $d(x, y)=\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|$ によって定めれば，$(\boldsymbol{R}^n, d)$ は距離空間となることを示せ．特に $n=2$ のとき，$\{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid d(x, \boldsymbol{0})=1\}$ $(\boldsymbol{0}=(0, 0))$ は何か．——

上に示したように，$\boldsymbol{R}^n$ の距離関数としてはいろいろのものをとることができ

るが，それらの間にはどんな関係があるだろうか．たとえば，$\boldsymbol{R}^2$ の距離関数としては Euclid 計量 d，それに上に述べた $d_{(a,b)}$ $(a, b>0)$ などがある．a, b がともに 1 でなければ，d と $d_{(a,b)}$ とは相異なる写像となるが，$\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 x, y が $(\boldsymbol{R}^2, d)$ において‘近い’とき，$(\boldsymbol{R}^2, d_{(a,b)})$ においても‘近い’こと，またその逆は言えそうである．このことについて，より明確に述べるために次節で‘ε 近傍’と‘連続写像’の概念を導入する．

§1.3　ε 近傍，連続写像

距離空間 (X, d) と，X の点 x が与えられたとき，X の点 y が‘x と近い点’であるとは，距離 $d(x, y)$ が‘小さい’ことを意味するものと考えられよう．ここで，或る正の実数 ε をとり，x からの距離が ε 以下であるような X の点の全体の成す集合を考え，それを x の (d に関する) ε **近傍** (ε-neighborhood) と呼ぶのである．点 x の ε 近傍を $U_\varepsilon(x)$ (または $U_\varepsilon{}^d(x)$) と表わせば，

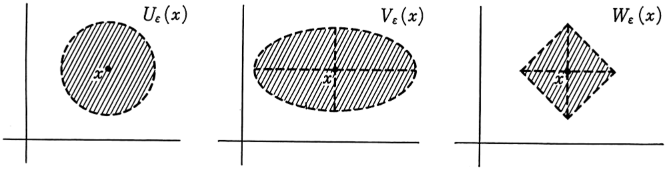
$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

となる．

1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$，すなわち直線においては，$\boldsymbol{R}$ の点 x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ は，x を中点とする長さ 2ε の開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ に他ならない．また，2 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^2$，すなわち平面においては，$\boldsymbol{R}^2$ の点 x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ は x を中心とし ε を半径とする円の内部すなわち**開円板** (open disc) (円周上の点は含まない) である．さて前節で述べたように，$\boldsymbol{R}^2$ の距離関数 d', d'' として，

$$d'(x, y) = ((x_1-y_1)^2/4+(x_2-y_2)^2)^{1/2}$$
$$d''(x, y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

(ただし $x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)$) によって与えられるものをとることができる．(前節の記法では $d'=d_{(1/4,1)}$ である．) $\boldsymbol{R}^2$ の点 x の，d' に関する ε 近傍を $V_\varepsilon(x)$，



d'' に関する ε 近傍を $W_\varepsilon(x)$ と書こう．$V_\varepsilon(x)$ は x を中心とする楕円の内部であり，$W_\varepsilon(x)$ は x を中心とする正方形の内部となる (図参照)．

定理 1.1　(X, d) を距離空間，x を X の点，ε を正の実数とするとつぎの (i)-(iii) が成り立つ．

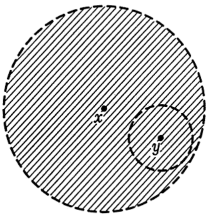
(i)　$x \in U_\varepsilon(x)$

(ii)　$\varepsilon < \varepsilon' \Longrightarrow U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon'}(x)$

(iii)　$y \in U_\varepsilon(x)$ とすると，正の実数 δ で，$\delta \leqq \varepsilon$ かつ $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$ となるようなものがある．

証明　(i), (ii) は定義から明らかである．(iii) を示すために，$d(x, y) < \varepsilon$ となることに注意しよう．δ を，$0 < \delta \leqq \varepsilon - d(x, y)$ となるようにとれば，$U_\delta(y)$ に含まれる任意の点 z に対して，

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta \leqq \varepsilon$$



となるから，$z \in U_\varepsilon(x)$ が成り立つ．したがって $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$ となる (図参照)．▌

問題 1.4　距離空間 X の点 x が与えられたとき，x の ε 近傍全体の共通部分は $\{x\}$ となること，すなわち

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x) = \{x\}$$

が成り立つことを示せ．

問題 1.5　距離空間 X の点 x, y および正の実数 $\varepsilon, \varepsilon'$ が与えられ，$U_\varepsilon(x) \cap U_{\varepsilon'}(y)$ が点 z を含むとする．このとき，正の実数 δ で，$U_\delta(z) \subset U_\varepsilon(x) \cap U_{\varepsilon'}(y)$ となるようなものが存在することを示せ．

例 1.4　X を任意の集合とする．x, y を X の元とするとき，$x \neq y$ ならば $d(x, y) = 1$，$x = y$ ならば $d(x, y) = 0$ とおいて，写像 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ を定める．する

と，容易に確かめられるように，(X, d) は距離空間となる．これを，**離散距離空間** (discrete metric space) と呼び，d を X の**離散計量** (discrete metric) と呼ぶ．x を X の点とするとき，正の実数 ε に対して，$\varepsilon \leqq 1$ ならば $U_\varepsilon(x)=\{x\}$，$\varepsilon>1$ ならば $U_\varepsilon(x)=X$ となる．

問題 1.6　定理 1.1 の (ii) の逆は必ずしも成り立たないことを示せ．——

第 I 部 §4.2 で，写像 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が，$\boldsymbol{R}$ の元 a において‘連続’であるということの定義を述べた．それによれば，任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ が存在して

$$\forall x(x \in \boldsymbol{R} \wedge |a-x|<\delta \Longrightarrow |F(x)-F(a)|<\varepsilon)$$

が成り立つときに，F は‘a において連続である’というのであった．ε 近傍のことばを用いて，上の命題を書きなおせば，

$$\forall x(x \in U_\delta(a) \Longrightarrow F(x) \in U_\varepsilon(F(a))),$$

あるいは，より簡明に，

$$F(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(F(a))$$

と表わされる．(第 I 部では，$U_\delta(a)$ の F による像は $F[U_\delta(a)]$ と表わしたが，第 II 部では簡単のためにこれを $F(U_\delta(a))$ と表わす．以下も同様である．) すなわち，F が‘a において連続である’とは，任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ を選んで，$F(U_\delta(a))$ が $U_\varepsilon(F(a))$ に含まれるようにすることができることを意味する．この表わし方はつぎのように，より一般的な場合に拡張することができる．(X, d), (Y, d') を距離空間，a を X の点，F を X から Y への写像とする．a の d に関する ε 近傍を $U_\varepsilon{}^d(a)$，$F(a)$ の d' に関する ε' 近傍を $U_{\varepsilon'}{}^{d'}(F(a))$ と書こう．ここで，任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ が存在し

$$F(U_\delta{}^d(a)) \subset U_\varepsilon{}^{d'}(F(a))$$

が成り立つとき，F は **a において連続である** (continuous at a) という．F が X の任意の点において連続であるとき，F を (X, d) から (Y, d') への，または X から Y への**連続写像** (continuous mapping) と呼ぶ．この定義から，距離空間 X, Y, Z および写像 $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ が与えられ，F が X の点 a で連続であり，しかも G が $F(a)$ で連続ならば，合成写像 $G \circ F$ は点 a で連続となることがわかる．

例 1.5　$\boldsymbol{R}^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ の Euclid 計量を d，$\boldsymbol{R}^n$ の離散計量を d' と書き，F を

$\boldsymbol{R}^n$ からそれ自身への恒等写像(すなわち $\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 x に対して $F(x)=x$) としよう．ここで，F は距離空間 $(\boldsymbol{R}^n, d)$ から離散距離空間 $(\boldsymbol{R}^n, d')$ への連続写像とはならないが，$(\boldsymbol{R}^n, d')$ から $(\boldsymbol{R}^n, d)$ への連続写像となる(読者自ら確かめられたい)．

問題 1.7　$\boldsymbol{R}^n$ の元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ にその第 i 成分 x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を対応させる写像 p_i を，$\boldsymbol{R}^n$ の元をその第 i 成分に写す**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．$a_1, \cdots, a_n$ を正の実数とするとき，2次形式 $Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ によって定められる計量を前と同様に $d_{(a_1,\cdots,a_n)}$ と書こう．p_i を，距離空間 $(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1,\cdots,a_n)})$ の台から1次元 Euclid 空間すなわち直線 $\boldsymbol{R}$ への写像とみなすとき，p_i は連続写像となることを示せ．

問題 1.8　F を距離空間 X から Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ への写像とし，p_i を $\boldsymbol{R}^n$ の元をその第 i 成分に写す標準的射影とする．このとき，F が X の点 a で連続であるためには，X から直線 $\boldsymbol{R}$ への写像 $p_i \circ F$ が $i=1, \cdots, n$ について点 a で連続であることが必要十分であることを示せ．

問題 1.9　n を自然数，$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ を $2n$ 個の正の実数とし，$d_1=d_{(a_1,\cdots,a_n)}$，$d_2=d_{(b_1,\cdots,b_n)}$ とするとき，$\boldsymbol{R}^n$ の恒等写像 F は，$(\boldsymbol{R}^n, d_1)$ から $(\boldsymbol{R}^n, d_2)$ への連続写像であることを示せ．［ヒント］問題1.8と同様の命題が，Euclid 空間 $(\boldsymbol{R}^n, d)$ を $(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1,\cdots,a_n)})$ で置き換えても成り立つことを示し，それを用いるとよい．

問題 1.10　(X, d) を距離空間，a を X の点とする．X の任意の点 x に，直線 $\boldsymbol{R}$ の点 $d(x, a)$ を対応させる写像 $F: X \to \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ．

問題 1.11　a, b を実数，$a<b$ とし，$X=S_2(a, b)$ とおく．d を，2次形式 $Q(f)=\int_a^b f(x)^2 dx$ $(f \in X)$ によって定まる X の距離関数とし，これによって X を距離空間と考える．ここで，X の元 f に，$\left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2}$ を対応させる写像 F は X から $\boldsymbol{R}$ への連続写像であることを示せ．

問題 1.12　a, b を問題1.11と同様とし，X を閉区間 $[a, b]$ で定義された有界な Riemann 積分可能な実数値関数全体から成る集合とする．X の元 f, g に対して，$d(f, g)=\sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)-g(x)|$ とおけば，d は X の計量となることを示し，ここで，X の元 f に $\int_a^b f(x)dx$ を対応させる写像 $F: X \to \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ．

例 1.6 平面 $\boldsymbol{R}^2$ から直線 $\boldsymbol{R}$ への写像 F として, $\boldsymbol{R}^2$ の点 $(x, y) \neq (0, 0)$ に対しては $F(x, y) = xy/(x^2+y^2)$, $F(0, 0) = 0$ によって定められるものをとろう. F は明らかに $\boldsymbol{R}^2$ の $(0, 0)$ 以外の点で連続である(読者自ら確かめられたい). $(0, 0)$ においても, F を x 軸あるいは y 軸に制限すれば, 連続である. (厳密にいえば, $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 i, j として $i(t) = (t, 0)$, $j(t) = (0, t)$ となるものをとれば, 合成写像 $F \circ i$, $F \circ j$ はそれぞれ 0 で連続である. 実際, $F \circ i(t) = F \circ j(t) = 0$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ となる!) さて, F を, $y = x$ によって表わされる直線の上に制限してみよう. $F(x, x) = x^2/2x^2 = 1/2$ $(x \neq 0)$ であるから, ε を任意の正の実数とするとき $(0, 0)$ の ε 近傍 $U_\varepsilon((0, 0))$ の点 (x, x) で $F(x, x) = 1/2$ となるものがある. このことから, F は $(0, 0)$ では連続ではないことがわかる. ——

(X, d), (Y, d') を距離空間とし, F を X から Y への全単射としよう. F が連続写像であっても, 逆写像 F^{-1} は必ずしも連続写像とはならないことは, 例 1.5 でも示された. ここで, F も F^{-1} もともに連続であれば, F を (X, d) から (Y, d') の上への, または X から Y の上への**位相写像** (topological mapping) または**同位相写像** (homeomorphism) と呼び, このとき距離空間 X, Y は**同位相** (homeomorphic) であるといい, $(X, d) \approx (Y, d')$ と表わす.

距離空間 (X, d) は, 明らかにそれ自身と同位相である. (恒等写像 1_X が, X からそれ自身の上への位相写像となる.) また, 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3) が与えられたとき, 定義より明らかにつぎのことが成り立つ.

$$(X_1, d_1) \approx (X_2, d_2) \Longrightarrow (X_2, d_2) \approx (X_1, d_1)$$

$$(X_1, d_1) \approx (X_2, d_2) \wedge (X_2, d_2) \approx (X_3, d_3) \Longrightarrow (X_1, d_1) \approx (X_3, d_3).$$

問題 1.9 から明らかなように, $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ を正の実数とするとき $(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1, \cdots, a_n)}) \approx (\boldsymbol{R}^n, d_{(b_1, \cdots, b_n)})$ となる. 特に, $(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1, \cdots, a_n)}) \approx (\boldsymbol{R}^n, d)$ (d は $\boldsymbol{R}^n$ の Euclid 計量). (実は, 2 次形式の理論から容易にわかるように, Q を $\boldsymbol{R}^n$ の任意の正の定符号形式とすると, $(\boldsymbol{R}^n, d_Q) \approx (\boldsymbol{R}^n, d)$ となる.)

問題 1.13 d を $\boldsymbol{R}^n$ の Euclid 計量, d' を, $\boldsymbol{R}^n$ の元 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して $d'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ によって与えられる $\boldsymbol{R}^n$ の計量とするとき, $(\boldsymbol{R}^n, d) \approx (\boldsymbol{R}^n, d')$ となることを示せ.

問題 1.14 (X, d) を距離空間, d' を X の離散計量とする. このとき, $(X, d) \approx (X, d')$ となるためには, X の任意の点 x に対して正の実数 $\varepsilon = \varepsilon_x$ を適当にと

って $U_\varepsilon(x)=\{x\}$ となるようにできることが必要十分であることを示せ．一般に，$(X, d)\approx(X, d')$ となるとき (X, d) (または X) は**離散的** (discrete) であるという．

§1.4　直積距離空間，部分距離空間

前節で見たように，距離空間 (X, d) と，X から Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ への写像 F とが与えられたとき，F が連続写像となるためには，$p_i\circ F$ (p_i は $\boldsymbol{R}^n$ の元をその第 i 成分へ写す標準的射影) が $i=1, \cdots, n$ についてすべて連続であることが必要十分である (問題 1.8)．同様の命題は，$\boldsymbol{R}^n$ の計量として $d_{(a_1,\cdots,a_n)}$ ($a_1, \cdots, a_n$ は正の実数) をとっても成り立ち，そのことを用いて Euclid 空間 $(\boldsymbol{R}^n, d)$ と $(\boldsymbol{R}^n, d_{(a_1,\cdots,a_n)})$ とが同位相となることが導かれる (問題 1.9)．実は一般につぎのことが成り立つ．

定理 1.2　X を集合，$(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ $(n\in \boldsymbol{N})$ を距離空間とし，写像 $f_i: X\to X_i$ $(i=1, \cdots, n)$ が与えられているとする．さらに X から直積 $\prod_{i=1}^n X_i$ への写像 F を，$F(x)=(f_1(x), \cdots, f_n(x))$ $(x\in X)$ によって定めると F は単射となるとする．このとき X の計量 d を適当に与えれば，任意の距離空間 (Y, d') と写像 $G: Y\to X$ に対して，命題

(C)　　　G は連続である $\Longleftrightarrow$ $f_i\circ G$ は連続である　$(i=1, \cdots, n)$

が成り立つ．さらに，X の計量 $\bar{d}$ についても命題 (C) が成り立てば，$(X, d)\approx(X, \bar{d})$ となる．

証明　まず，X の計量 $d, \bar{d}$ が存在して，それらについて (C) が成り立てば $(X, d)\approx(X, \bar{d})$ となることを証明しよう．まず $Y=X$ とし，G として X の恒等写像 1_X をとれば，1_X は (X, d) から (X, d) 自身への連続写像であるから，(C) によって f_i はすべて (X, d) から (X_i, d_i) への連続写像となる．さて，1_X は (X, d) から $(X, \bar{d})$ への写像とみなすことができるが，ここで $f_i=f_i\circ 1_X$ がすべて連続なのだから計量 $\bar{d}$ が命題 (C) を成り立たせることを用いると，1_X は (X, d) から $(X, \bar{d})$ の上への連続写像となることがわかる．d と $\bar{d}$ をとり換えて同じ議論を用いると，$1_X=1_X^{-1}$ が $(X, \bar{d})$ から (X, d) の上への連続写像となることがいえ，したがって $(X, d)\approx(X, \bar{d})$ が成り立つ．

命題 (C) を成り立たせるような X の計量 d としては，

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}d_i(f_i(x),f_i(y))^2\right)^{1/2}\qquad (x,y\in X)$$

をとることができる．d が X の計量となることは容易に確かめられるから，読者にお任せしよう．(d が三角不等式を満たすことは，正の実数 a_i, b_i, c_i で，$a_i+b_i\geqq c_i$ $(i=1,\cdots,n)$ となるようなものが与えられたとき

$$(1.4)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}$$

したがって

$$(1.5)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)^{1/2}$$

が成り立つことから直ぐにわかる．(1.4) が成り立つことは，Cauchy-Schwarz の不等式から導かれる.)　この d が命題 (C) を成り立たせることも容易にわかる (読者自ら確かめられたい)．▌

上の証明の中で導入された X の計量 $d\left(d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}d_i(f_i(x),f_i(y))^2\right)^{1/2}\right)$ を，$\{(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)\}$ から $\{f_1,\cdots,f_n\}$ によって**誘導される計量** (induced metric) と呼び，(X,d) を同様に，$\{(X_i,d_i)\}$ から $\{f_i\}$ によって**誘導される**距離空間と呼ぶ．

特に，$(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)$ を距離空間，$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ (直積)，p_i を X の元 $(x_1,\cdots,x_n)$ を X_i の元 x_i へ写す標準的射影としよう $(i=1,\cdots,n)$．このとき，$\{(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)\}$ から $\{p_1,\cdots,p_n\}$ によって誘導される距離空間 (X,d) を $(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)$ の**直積距離空間** (direct product metric space) と呼び，d を $d_1,\cdots,d_n$ の**直積計量** (direct product metric) と呼ぶ．このとき (X,d) を $\prod_{i=1}^{n}(X_i,d_i)$ または $(X_1,d_1)\times\cdots\times(X_n,d_n)$ とも書くことにする．n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は，直線 $\boldsymbol{R}$ の n 個の直積距離空間に他ならない．

一方，(X,d) を距離空間，Y を X の部分集合，ι を Y から X への包含写像 (すなわち $y\in Y$ に対して $\iota(y)=y\in X$) とすると ι は単射だから定理 1.2 が適用され，(X,d) から ι によって誘導される Y の計量としては，d を $Y\times Y$ に制限したものがとれる．この計量をまた d と書こう．すなわち，Y の元 y_1,y_2 に対して $d(y_1,y_2)$ は y_1,y_2 を X の元とみなしたときの y_1,y_2 の距離に他ならない．このとき，(Y,d) を (X,d) の**部分距離空間** (metric subspace) と呼ぶ．$(X=\phi,$

$d=\phi$ とすると，(X, d) は(無内容的にだが)距離空間の公理を満たし，したがって距離空間となる．上の場合，(X, d) を一般の距離空間，$Y=\phi$ とすると，d を $Y\times Y$ に制限した写像は ϕ となる.)

例 1.7 n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合として

$$\boldsymbol{Z}^n=\{(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n \mid x_i\in\boldsymbol{Z}\ (i=1, \cdots, n)\}$$

を考える．$\boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の‘格子点集合’と呼ぶ．$\boldsymbol{Z}^n$ は，$\boldsymbol{R}^n$ の部分距離空間として離散的となる．

問題 1.15 (X, d) を距離空間，X を有限集合とすると，(X, d) は離散的であることを示せ．——

n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{R}^n, d)$ の点 a と正の実数 ε が与えられたとき，a の ε 近傍 $U_\varepsilon(a)$ を a を中心とする半径 ε の **n 次元開球** (n-dimensional open ball) と呼ぶ．$(U_\varepsilon(a), d)$ は $(\boldsymbol{R}^n, d)$ の部分距離空間となる．

任意の n 次元開球 $U_\varepsilon(a)$, $U_{\varepsilon'}(a')$ は互いに同位相である．実際，写像 $F: U_\varepsilon(a)\to U_{\varepsilon'}(a')$ を，$U_\varepsilon(a)$ の点 x に対し $F(x)=(\varepsilon'/\varepsilon)(x-a)+a'$ によって定めれば，F は明らかに $U_\varepsilon(a)$ から $U_{\varepsilon'}(a')$ の上への位相写像となる．また，写像 $G: U_\varepsilon(a)\to\boldsymbol{R}^n$ を，$U_\varepsilon(a)$ の点 x に対して $G(x)=\tan(\pi d(x, a)/2\varepsilon)(x-a)+a$ によって定めれば，G は $U_\varepsilon(a)$ から $\boldsymbol{R}^n$ の上への位相写像となる！ したがって，$U_\varepsilon(a)\approx\boldsymbol{R}^n$.

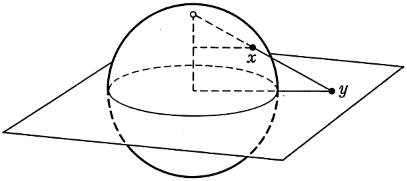
一般に距離空間 (X, d) とその台 X の部分集合 S が与えられたとき，$\delta(S)=\{a\in\boldsymbol{R} \mid \exists x\exists y\,(x, y\in S\wedge a=d(x, y))\}$ とおこう．たとえば $S=\{x\}$ $(x\in X)$ なら $\delta(S)=\{0\}$，また $S=\{x, y\}$ なら $\delta(S)=\{0, d(x, y)\}$ である．$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $\delta(S)$ が上界を持つとき S を X の**有界部分集合** (bounded subset) と呼び，そのとき $\sup(\delta(S))$ を S の**直径** (diameter) と呼んで $\operatorname{diam} S$ とも書く．特に $X=\boldsymbol{R}^n$, $S=U_\varepsilon(a)$ $(a\in X)$ ならば $\operatorname{diam} S=2\varepsilon$. また上に見たように $\boldsymbol{R}^n$ は有界距離空間と同位相である．

一般に，(X, d) を距離空間，$w\in X$ とするとき，写像 $d': X\times X\to\boldsymbol{R}$ を $d'(x, y)=|\mathrm{Tan}^{-1}d(w, x)-\mathrm{Tan}^{-1}d(w, y)|$ によって定めると d' は X の計量となり，(X, d') は有界距離空間となる．またこのとき 1_X は (X, d) から (X, d') の上への位相写像となる(読者自ら確かめられたい).

例 1.8 n 次元 Euclid 空間 $(\boldsymbol{R}^n, d)$ $(n\in\boldsymbol{N})$ に対して

$$S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid d(x, \boldsymbol{0}) = 1\}$$

とおき，(S^{n-1}, d) または単に S^{n-1} を $n-1$ 次元**球面** (sphere) と呼ぶ．S^0 は 2 点，S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする半径 1 の円周，S^2 は $\boldsymbol{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面である．S^2 の点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ で $(0, 0, 1)$ とは異なるものをとり，



それに $\boldsymbol{R}^2$ の点 $y=(y_1, y_2)$ をつぎのように対応させよう．

$$y_1 = x_1/(1-x_3), \qquad y_2 = x_2/(1-x_3).$$

このとき，$S^2-\{(0, 0, 1)\}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 F を，$F(x)=y$ とおいて定めれば，F は明らかに連続写像である．また，$\boldsymbol{R}^2$ の点 $y=(y_1, y_2)$ に対して

$$x_1 = 2y_1/({y_1}^2+{y_2}^2+1)$$
$$x_2 = 2y_2/({y_1}^2+{y_2}^2+1)$$
$$x_3 = ({y_1}^2+{y_2}^2-1)/({y_1}^2+{y_2}^2+1)$$

とおくと $x=(x_1, x_2, x_3)$ は $S^2-\{(0, 0, 1)\}$ に含まれ，$\boldsymbol{R}^2$ から $S^2-\{(0, 0, 1)\}$ への写像 G で $G(y)=x$ によって与えられるものは連続，しかも F の逆写像となることが容易に確かめられる．したがって $\boldsymbol{R}^2 \approx S^2-\{(0, 0, 1)\}$．(§3.2 で示されるように，$\boldsymbol{R}^2$ と S^2 とは同位相にはならない．)

§1.5 等距離写像，直交群

(X, d), (Y, d') をそれぞれ距離空間としよう．写像 $F: X \to Y$ は，つぎの条件が満たされるとき (X, d) から (Y, d') への（または X から Y への）**等距離写像** (isometry) と呼ばれる．

(1.6) $$d'(F(x), F(y)) = d(x, y) \qquad (\forall x, y \in X).$$

等距離写像が単射でありしかも位相写像となることは明らかだが，その逆は，前節のいろいろな例からもわかるように，一般には成り立たない．

距離空間 (X, d) に対して，X をそれ自身の上へ写す位相写像全体の成す集合

を Homeo(X, d) と書こう．Homeo(X, d) は写像の合成を算法とする群となる．Homeo(X, d) を (X, d) の**位相置換群**と呼ぼう．一方，X をそれ自身の上へ写す等距離写像全体の成す集合を Iso(X, d) と書けば，これは Homeo(X, d) の部分群となる．Iso(X, d) を (X, d) の**等距離置換群**と呼ぶことにする．$(X, d) \approx (X', d')$ ならば，明らかに Homeo$(X, d) \cong$ Homeo(X', d') (群同型) となる．また d が X の離散計量ならば，明らかに Homeo$(X, d) = \mathfrak{S}(X)$ (X の全置換群) となる．たとえば，$(\boldsymbol{R}, d)$ を 1 次元 Euclid 空間，$(\boldsymbol{Z}, d)$ をその部分距離空間とすると，Homeo$(\boldsymbol{Z}, d) = \mathfrak{S}(\boldsymbol{Z})$ である．しかし，Iso$(\boldsymbol{Z}, d)$ は $\mathfrak{S}(\boldsymbol{Z})$ とは異なる．Iso$(\boldsymbol{Z}, d)$ の元 σ, τ_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ として，$\boldsymbol{Z}$ の任意の元 x に対して，$\sigma(x) = -x$ によって定まるもの，および $\tau_n(x) = x + n$ によって定まるものがある．実は，g を Iso$(\boldsymbol{Z}, d)$ の任意の元とするとき，$g(0) = n$ とすれば，$g = \tau_n$ または $\tau_n \circ \sigma$ となることがわかる(これは容易に確かめられるから，読者に任せる)．このように，Homeo(X, d) と Iso(X, d) とは一般には非常に異なった群である．

$\boldsymbol{R}^n$ の置換群として，**n 次一般線型群** (general linear group of degree n) $GL_n(\boldsymbol{R})$ がある．$GL_n(\boldsymbol{R})$ は n 次実正方行列 (x_{ij}) $(1 \leqq i, j \leqq n,\ x_{ij} \in \boldsymbol{R})$ で行列式 $\det(x_{ij}) \neq 0$ となるものの全体から成る群で，その各元 (x_{ij}) は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の線型変換：

$$(x_{ij}) : \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} u_j$$

をひき起す．この線型変換を $L_{(x_{ij})}$ と書けば，明らかに $L_{(x_{ij})}$ は Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ からそれ自身の上への連続写像となり，$L_{(x_{ij})^{-1}}$ はその連続な逆写像である．ゆえに，$L_{(x_{ij})}$ は Homeo$(\boldsymbol{R}^n, d)$ の元となる．$GL_n(\boldsymbol{R})$ の各元 g に Homeo$(\boldsymbol{R}^n, d)$ の元 L_g を対応させる写像は明らかに群の準同型写像であり，しかも単射だから，この写像による像と $GL_n(\boldsymbol{R})$ とを同一視し，$GL_n(\boldsymbol{R})$ を Homeo$(\boldsymbol{R}^n, d)$ の部分群とみなすことにしよう．**n 次特殊線型群** (special linear group of degree n) $SL_n(\boldsymbol{R})$ $(= \{g \in GL_n(\boldsymbol{R}) \mid \det g = 1\})$ も Homeo$(\boldsymbol{R}^n, d)$ の部分群とみなされる．$GL_n(\boldsymbol{R}) \cap$ Iso$(\boldsymbol{R}^n, d)$ を n 次**直交群** (orthogonal group) と呼び $O(n)$ と表わす．また，$SL_n(\boldsymbol{R}) \cap O(n)$ を n 次の**回転群** (rotation group) または**固有直交群** (special orthogonal group) と呼び $SO(n)$ と表わす．$\boldsymbol{R}^n$ の元を縦ベクトルとして表

わし，その内積を $\langle u, v\rangle$ ($u, v \in \boldsymbol{R}^n$) と書けば，$\langle u, v\rangle = {}^t uv$ (${}^t u$ は縦ベクトル u の転置ベクトル) となる．$GL_n(\boldsymbol{R})$ の任意の元 g に対して，$\langle g(u), g(v)\rangle = {}^t u({}^t gg)v$ (${}^t g$ は g の転置行列) だから，${}^t gg = 1_n$ (n 次単位行列) ならば $g \in O(n)$ となる．(実際，このとき，$d(g(u), g(v)) = \langle g(u) - g(v), g(u) - g(v)\rangle^{1/2} = \langle g(u-v), g(u-v)\rangle^{1/2} = \langle u-v, u-v\rangle^{1/2} = d(u, v)$ となる.) また，逆に $g \in O(n)$ とすると，$\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 u, v に対して，$\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ となる．(実際，$d(g(u), g(v))^2 = \langle g(u) - g(v), g(u) - g(v)\rangle = \langle g(u), g(u)\rangle - 2\langle g(u), g(v)\rangle + \langle g(v), g(v)\rangle$ となるが，$\langle g(u), g(u)\rangle = \langle g(u) - \boldsymbol{0}, g(u) - \boldsymbol{0}\rangle = \langle g(u) - g(\boldsymbol{0}), g(u) - g(\boldsymbol{0})\rangle = d(g(u), g(\boldsymbol{0}))^2 = d(u, \boldsymbol{0})^2 = \langle u, u\rangle$，同様に $\langle g(v), g(v)\rangle = \langle v, v\rangle$，さらに $d(g(u), g(v))^2 = d(u, v)^2 = \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$ だから，$\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ となる.) ここで，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)$ をとって $\langle g(\boldsymbol{e}_i), g(\boldsymbol{e}_j)\rangle = {}^t\boldsymbol{e}_i {}^t gg\boldsymbol{e}_j = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker のデルタ) を用いれば，${}^t gg = 1_n$ が得られる．すなわち，

$$O(n) = \{g \in GL_n(\boldsymbol{R}) \mid {}^t gg = 1_n\}$$

となる．$g \in O(n)$ をとると，$\det({}^t gg) = (\det g)^2 = 1$，ゆえに，$\det g = \pm 1$ であるから，$g \in O(n)$ に $\det g \in \{\pm 1\}$ を対応させることによって群の準同型写像 $\det : O(n) \to \{\pm 1\}$ が得られる．$SO(n) = \mathrm{Ker}(\det)$ だから，これは $O(n)$ の正規部分群であり，容易にわかるように $[O(n) : SO(n)] = 2$ となる．特に $O(1) = \{\pm 1\}$，$SO(1) = \{1\}$ となってつまらないが，

$$SO(2) = \left\{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| 0 \leqq \theta < 2\pi\right\}$$

となることが容易に確かめられる(読者自ら確かめられたい)．$GL_n(\boldsymbol{R})$ は Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の部分集合として，部分距離空間となる．写像 $\mu : GL_n(\boldsymbol{R}) \times GL_n(\boldsymbol{R}) \to GL_n(\boldsymbol{R})$ および $\nu : GL_n(\boldsymbol{R}) \to GL_n(\boldsymbol{R})$ を $\mu(g, h) = gh$，$\nu(g) = g^{-1}$ によって定めると，μ, ν はともに連続写像となる(読者自ら確かめられたい)．$SL_n(\boldsymbol{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ など $GL_n(\boldsymbol{R})$ の部分群についても同様のことがいえる．これらの群は，**位相群**と呼ばれる群の典型的な例であるが，そのことについては後に (§4.2) 述べよう．

問題 1.16 $G = SO(2)$ とし，$\boldsymbol{R}^2$ の元 u に対して $G(u) = \{v \in \boldsymbol{R}^2 \mid \exists g(g \in G \wedge v = g(u))\}$ と置く．$G(u)$ は原点 $\boldsymbol{0}$ を中心とし，点 u を通る円周と一致することを

示せ.

§1.6 付値, p 進計量

1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の計量 d を導入するために, われわれは $\boldsymbol{R}$ の元の絶対値の性質を用いた. 絶対値の概念をより一般化して, つぎに述べる体の'付値'の概念が得られる.

K を体, v を K から実数体 $\boldsymbol{R}$ への写像とする. v がつぎの条件 (i)-(iii) を満たすとき, v は K の**付値** (valuation) と呼ばれる.

(i) K の任意の元 x に対して $v(x) \geqq 0$. また $v(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $v(xy) = v(x)v(y) \quad (x, y \in K)$

(iii) $v(x+y) \leqq v(x)+v(y) \quad (x, y \in K)$.

K が複素数体 $\boldsymbol{C}$ の部分体であるとき, K の元 x に対して, $v(x)=|x|$ (x の絶対値) とおけば, v は明らかに K の付値となる. 一般に体 K の付値 v が与えられたとき, K の元 x, y に対して $d(x, y)=v(x-y)$ とおけば K の計量が得られるということは容易に推察されよう. しかし, このことについて説明する前に, 特に K が有理数体 $\boldsymbol{Q}$ である場合の付値の例をあげよう.

p を素数, x を 0 とは異なる整数とすれば, x は $\pm p^e r$ (p と r は互いに素) の形に一意的に表わされる. このとき, e を x の **p 指数** (p-exponent) と呼んで, $e=e_p(x)$ と表わすことにする. いま x を 0 とは異なる有理数としよう. このとき $x=r/s$ ($r, s \in \boldsymbol{Z}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$) と書けるが, $e_p(x)=e_p(r)-e_p(s)$ とおけば, $e_p(x)$ は r, s の選び方にはよらないで x によって定まる. ここで, x を 0 ではない有理数とするとき

$$v_p(x) = p^{-e_p(x)}$$

とおき, $x=0$ のときには $v_p(0)=0$ とおこう. たとえば, $v_2(2)=2^{-1}$, $v_2(3)=1$, $v_2(4)=2^{-2}$, $v_2(6)=2^{-1}$, …. v_p が, 付値の条件 (i), (ii) を満たすことは明らかである. また

$$(1.7) \qquad v_p(x+y) \leqq \max\{v_p(x), v_p(y)\} \qquad (x, y \in \boldsymbol{Q})$$

が成り立つことも容易に確かめられる. (1.7) から (iii) が導かれることは明らかである. こうして各素数 p に対して $\boldsymbol{Q}$ の付値 v_p が得られた. v_p のことを $\boldsymbol{Q}$ の **p 進付値** (p-adic valuation) と呼ぶ. 上の条件 (1.7) は, たとえば $v_p(x)$ のかわ

りに $\boldsymbol{Q}$ の元の絶対値 $v(x)=|x|$ をとれば成り立たない．$\boldsymbol{Q}$ の付値 v で，$v(x)=|x|$ とおいて得られるものを，$\boldsymbol{Q}$ の **Archimedes 的付値**または**無限付値** (infinite valuation) と呼んで，v_∞ とも表わす．また，一般に体 K の付値 v が，条件

$$v(x+y) \leqq \max\{v(x), v(y)\} \qquad (x, y \in K)$$

を満たすならば，v は K の**非 Archimedes 的付値**と呼ばれる．

問題 1.17 v を体 K の非 Archimedes 的付値，$x, y \in K$，$v(x)<v(y)$ ならば $v(x+y)=v(y)$ となることを示せ．［ヒント］$v(y)=v((x+y)-x)\leqq\max\{v(x+y), v(x)\}$ を示し，さらに $v(x)<v(y)$ より $v(y)\geqq v(x+y)$ が成り立つことを示せばよい．

定理 1.3 体 K とその付値 v が与えられているとき，K の任意の元 x, y に対して $d(x, y)=v(x-y)$ とおけば，(K, d) は距離空間となる．さらに，写像 α: $K\times K\to K$，$\alpha' : K\times K\to K$，$\beta : K\times K\to K$，$\gamma : K^*\to K^*$ (K^* は K の零元とは異なる元全体の集合) をそれぞれ $\alpha(x, y)=x+y$，$\alpha'(x, y)=x-y$，$\beta(x, y)=xy$，$\gamma(x)=x^{-1}$ によって定めると，$\alpha, \alpha', \beta, \gamma$ はみな連続写像となる．

証明 K の乗法に関する単位元を普通のように 1 と書こう．すると $v(1^2)=v(1)^2=v(1)$，$v(1)>0$ だから $v(1)=1$ となる．また，$v(-1)^2=v((-1)^2)=v(1)=1$ だから $v(-1)=1$ である．これから $v(x-y)=v(y-x)$ がいえる．$d(x, y)=v(x-y)$ が距離の公理を満たすことは，明らかであるから読者自ら確かめられたい．写像 α が連続であることは，

$$v((x+y)-(x'+y')) = v((x-x')+(y-y')) \leqq v(x-x')+v(y-y')$$

から容易に導かれる．α' の連続性についても同様である．β の連続性は，

$$\begin{aligned} v(xy-x'y') &= v((xy-xy')+(xy'-x'y')) \\ &\leqq v(x)v(y-y')+v(x-x')v(y') \end{aligned}$$

から容易に導かれる．($v(y')\leqq v(y'-y)+v(y)$ に注意するとよい．写像 γ が連続であることを示すために，x, y を K の零元とは異なる元としよう．

$$v(x^{-1}-y^{-1}) = v((y-x)x^{-1}y^{-1}) = v(y-x)v(x^{-1})v(y^{-1})$$

となるが，$v(x)v(x^{-1})=1$ だから $v(x^{-1})=v(x)^{-1}$，$v(y^{-1})=v(y)^{-1}$ である．さて，ここで，$d(x, y)$ が‘十分小さい’ときに，$v(x)^{-1}$ と $v(y)^{-1}$ の比も‘小さい’ことを示そう．実際，$v(x-y)\leqq v(x)/2$ とすると，$v(x)=v((x-y)+y)\leqq v(x-y)+v(y)\leqq v(x)/2+v(y)$ だから $v(x)/2\leqq v(y)$ となり，$v(x)v(y)^{-1}\leqq 2$ が成り立

つ．したがって，$v(x-y)\leqq v(x)/2$ のとき，$v(x)^{-1}v(y)^{-1}\leqq 2v(x)^{-2}$ となり，上式より，

$$v(x^{-1}-y^{-1})\leqq 2v(y-x)v(x)^{-2}$$

がいえる．このことから γ が連続であることは容易にわかる．▌

特に体 K として有理数体 $\boldsymbol{Q}$ をとろう．v として無限付値 v_∞ をとれば，それから得られる計量 $d=d_\infty$ は Euclid 計量（を $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}$ に制限したもの）である．また v として p 進付値 v_p をとるとき，$d(x,y)=v_p(x-y)$ $(x,y\in\boldsymbol{Q})$ とおいて得られる計量 d を **p 進計量**（p-adic metric）と呼んで d_p と書こう．こうして，無限個の素数のそれぞれに対応して計量 d_p が得られる．たとえば，$2,4,8,16,\cdots,2^n,2^{n+1},\cdots$ は n が大きくなるにつれて，d_2 に関して 0 に近づくが，$p\neq 2$ のときにはそうではない．一般に素数 p,q が相異なるとき，d_p,d_q も互いに違った性質を持つように思える．この事柄についてより明確に見るために，次節で距離空間の Cauchy 列および収束列という概念を導入しよう．

§1.7　距離空間の Cauchy 列，完備距離空間

(X,d) を距離空間とする．X の点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は，つぎの条件 (C) が満たされるとき (X,d) の，または X の（d に関する）**Cauchy 列**（Cauchy sequence）または**基本列**（fundamental sequence）と呼ばれる．

(C)　任意の正の実数 ε に対して，適当な $N\,(\in\boldsymbol{N})$ をとれば，$n\geqq N$ となる任意の自然数 n について $d(x_n,x_N)<\varepsilon$ となる．

注意　多くの書物では，(C) のかわりにつぎの (C_1) の形の条件が用いられているが，(C) と (C_1) とが同値なことは直ちに示される．

(C_1)　任意の正の実数 ε に対して，適当な $N\,(\in\boldsymbol{N})$ をとれば，$n,n'\geqq N$ となる任意の自然数 n,n' について $d(x_n,x_{n'})<\varepsilon$ となる．

例 1.9　$(\boldsymbol{R},d)$（d は Euclid 計量）において，点列 $(1,2,3,\cdots)$ は Cauchy 列ではない．また a を実数で $0\leqq|a|<1$ となるものとすると，点列 $(a^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列となる．

例 1.10　$(\boldsymbol{Q},d_p)$（d_p は p 進計量）において，点列 $(p^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列となる．

問題 1.18　p,q を互いに相異なる素数とすると，$\boldsymbol{Q}$ の点列 $(p^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は d_q に関

しては Cauchy 列とはならないことを示せ．

例 1.11 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ において，点列 $\left(\sum_{i=k}^{k+n} a_i p^i\right)_{n\in\boldsymbol{N}}$ (ただし $k\in\boldsymbol{Z}$, a_i は整数で $0\leqq a_i\leqq p-1$, k および数列 $(a_k, a_{k+1}, \cdots)$ は与えられたものとする) は Cauchy 列となる (読者自ら確かめられたい)．——

(X, d) を距離空間，Y を X の部分距離空間とする．Y の点列 $(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が Cauchy 列であるためには，明らかに $(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が X の点列として d に関して Cauchy 列であることが必要十分である．

$(X_1, d_1), \cdots, (X_k, d_k)$ を距離空間，$(X, d)=\prod_{i=1}^{k}(X_i, d_i)$ とすると，X の点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}=((x_{n1}, \cdots, x_{nk}))_{n\in\boldsymbol{N}}$ $(x_{ni}\in X_i)$ が直積計量 d に関して Cauchy 列であるためには，点列 $(x_{ni})_{n\in\boldsymbol{N}}$ がそれぞれ (X_i, d_i) の Cauchy 列 $(i=1, \cdots, k)$ となることが必要十分である (読者自ら確かめられたい)．

一般に，距離空間 (X, d) と X の点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が与えられたとしよう．もしも X の点 x で，つぎの条件 (C′) を満たすものがあれば，$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は (X, d) の**収束列** (convergent sequence) と呼ばれ，x は $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の (d に関する) **極限点** (limit point) であるという．

(C′) 任意の正の実数 ε に対して，適当な $N\,(\in\boldsymbol{N})$ をとれば，$n\geqq N$ となる任意の自然数 n について $d(x, x_n)<\varepsilon$ となる．

$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が X の収束列ならば，それは X の Cauchy 列となる．実際，x を $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限点とし，ε を任意の正の実数とするとき，自然数 N を $n\geqq N$ となる任意の自然数に対して $d(x, x_n)<\varepsilon/2$ となるように選べば，

$$d(x_n, x_N)\leqq d(x_n, x)+d(x, x_N)<\varepsilon$$

が成り立ち，(C) が成立するからである．収束列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限点は一意的である．実際 x, y を $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限点とすれば，任意の正の実数 ε に対して，自然数 N を適当にとり $n\geqq N$ となる任意の自然数 n について $d(x, x_n)<\varepsilon$, $d(y, x_n)<\varepsilon$ が成り立つようにできる．このとき，

$$d(x, y)\leqq d(x, x_N)+d(x_N, y)<2\varepsilon$$

が成り立つから，$d(x, y)=0$ すなわち $x=y$ とならなければならない．収束列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限点 x を，$x=d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, $x=\lim_{n\to\infty} x_n$ あるいは単に $x=\lim x_n$ と表わす．

例 1.12 $\boldsymbol{R}_+=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x>0\}$ とし，$\boldsymbol{R}_+$ を $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間と考える ($\boldsymbol{R}$ の計

量は Euclid 計量をとる)．$\boldsymbol{R}_+$ の点列 $(a^n)_{n\in N}$ $(0<a<1)$ は Cauchy 列であるが，収束列ではない．

例 1.13　$\boldsymbol{Q}$ の点列 $(p^n)_{n\in N}$ (p は素数) は d_p に関して収束列で，$d_p\text{-}\lim_{n\to\infty} p^n=0$ となるが，q を p とは異なる素数とすれば，$(p^n)_{n\in N}$ は d_q に関しては収束列ではない．

定理 1.4　距離空間 (X, d), (Y, d') と写像 $F: X\to Y$ が与えられているとする．このとき，つぎの (i), (ii) は同値である．

(i)　F は (X, d) から (Y, d') への連続写像である

(ii)　$(x_n)_{n\in N}$ を (X, d) の任意の収束列とすると，$(F(x_n))_{n\in N}$ は (Y, d') の収束列となり，$F(\lim x_n)=\lim F(x_n)$ となる．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つことを示そう．F を (X, d) から (Y, d') への連続写像とし，$(x_n)_{n\in N}$ を (X, d) の収束列とする．$x=\lim x_n$，$y_n=F(x_n)$，$y=F(x)$ とおこう．ε を任意の正の実数とすると，F の連続性により，適当な正の実数 δ をとれば，$x'\in X$ について

$$(*)\qquad d(x, x')<\delta \Longrightarrow d'(y, F(x'))<\varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$x=\lim x_n$ であることを用いれば，適当な自然数 N をとり，$n\geqq N$ となる任意の自然数 n について，$d(x, x_n)<\delta$ が成り立つようにできる．したがって，$(*)$ により $n\geqq N$ のとき，$d'(y, F(x_n))=d'(y, y_n)<\varepsilon$ が成り立つ．これは，$(y_n)_{n\in N}$ が y を極限点とする収束列であるということに他ならない．こうして (i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つことが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) が成り立つことを示すために，その対偶が成り立つことを証明しよう．そのため，X の点 x において F は連続ではないと仮定し，$y=F(x)$ とする．すると適当な正の実数 ε をとれば，どのような正の実数 δ に対しても $F(U_\delta^d(x))\not\subset U_\varepsilon^{d'}(y)$ となる (ただし $U_\delta^d(x)$ は x の δ 近傍，$U_\varepsilon^{d'}(y)$ は y の ε 近傍である)．特に，δ として $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \cdots$ をとれば，各自然数 n について，$U_{2^{-n}}{}^d(x)$ の元 x_n で $F(x_n)=y_n\notin U_\varepsilon^{d'}(y)$ となるようなものがとれる (選出公理を用いた!)．$(x_n)_{n\in N}$ は (X, d) の収束列で $\lim x_n=x$ となるが，明らかに $\lim y_n=y$ は成り立たない．こうして，$\neg$(i) $\Longrightarrow$ $\neg$(ii) が成り立つことが示された．▌

注意　定理 1.4 によって，距離空間 X から距離空間 Y への連続写像 F は X の収束列を Y の収束列へ写すことがわかったが，Cauchy 列については同様のことは成り立つとは

限らない．たとえば，$X=Y=\{x\in \boldsymbol{R}\mid x>0\}$ とし，これを1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間と考え，X から Y への写像 F として，$F(x)=x^{-1}$ によって定められるものをとろう．F は明らかに X から Y の上への位相写像である．X の Cauchy 列として $(2^{-n})_{n\in \boldsymbol{N}}$ がとれるが，この 'F による像' $(F(2^{-n}))_{n\in \boldsymbol{N}}=(2^n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列ではない！

p, q を素数としよう．例 1.13 でも述べたように，$(p^n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ の収束列で d_p-$\lim p^n=0$ となるが，$(p^n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ が $(\boldsymbol{Q}, d_q)$ の収束列であって d_q-$\lim p^n=0$ となるためには $p=q$ となることが必要十分である．したがって，定理 1.4 により，$p\neq q$ のとき $\boldsymbol{Q}$ の恒等写像 $1_{\boldsymbol{Q}}$ は $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ から $(\boldsymbol{Q}, d_q)$ への連続写像とはならないことがわかる．このことからも，p 進計量 d_p は素数 p の '個性' に依存してきまる性質を持っているらしいことが予想されよう．$\boldsymbol{Q}$ の p 進計量 d_p は，Euclid 計量とともに数論ではよく用いられる．

d を $\boldsymbol{R}$ の Euclid 計量とすると，$(\boldsymbol{R}, d)$ の Cauchy 列は必ず収束列となる（第 I 部 §4.3)．$(\boldsymbol{Q}, d)$ については，しかしそのようなことは成り立たない．たとえば，$(\boldsymbol{R}, d)$ の収束列 $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ で，$\lim x_n=\sqrt{2}$，$x_n\in \boldsymbol{Q}$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ となるようなものをとれば，$(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は明らかに $(\boldsymbol{Q}, d)$ の Cauchy 列となるが，$(\boldsymbol{Q}, d)$ の収束列にはならない（読者自ら確かめられたい）．

一般に，距離空間 (X, d) において，(X, d) の Cauchy 列が必ずその収束列となるとき，(X, d) は**完備な** (complete) 距離空間と呼ばれる．上に述べたことから明らかなように，$(\boldsymbol{R}, d)$ (d は Euclid 計量）は完備であるが，その部分距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d)$ は完備ではない．また例 1.3 で述べた $S_2(a, b)$ は完備な距離空間とはならない．ところが，$S_2(a, b)$ よりもさらに広く，$[a, b]$ で定義された実数値関数 $f(x)$ で，$f(x)^2$ が Lebesgue 積分可能であるようなもの全体を考え，その集合を $L_2(a, b)$ とおくと，$L_2(a, b)$ は完備な距離空間となることが知られている．($L_2(a, b)\ni f, g$ に対して，$d(f, g)=\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx\right)^{1/2}$ とおくと，d は $L_2(a, b)$ の計量となる．) $L_2(a, b)$ は 'Hilbert 空間' の典型的な例の一つである．

問題 1.19 $(X_1, d_1), \cdots, (X_k, d_k)$ を完備な距離空間とすれば，それらの直積 $\prod_{i=1}^{k}(X_i, d_i)$ も完備であることを示せ．

注意 §1.4 で見たように，$\boldsymbol{R}^n\approx U_\varepsilon(a)$ $(a\in \boldsymbol{R}^n,\ \varepsilon>0)$ が成り立つ．$\boldsymbol{R}^n$ は問題 1.19 からもわかるように完備であるが，$U_\varepsilon(a)$ は完備ではない．実際 $a=(a_1, \cdots, a_n)$，$b=(a_1+\varepsilon, a_2, \cdots, a_n)$ とすると，$\boldsymbol{R}^n$ の収束列 $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ で，$x_1=a$，$x_k\in U_\varepsilon(a)$，$\lim x_k=b$ となるようなものがとれる．$(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は $U_\varepsilon(a)$ の Cauchy 列だが，$U_\varepsilon(a)$ の収束列ではない．

$\boldsymbol{Q}$ の計量 d を，普通のように $d(x, y)=|x-y|$ $(x, y\in \boldsymbol{Q})$ によって定め，$(\boldsymbol{Q}, d)$ の Cauchy 列全体を適当な同値関係によって類別すると実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が得られることは第 I 部で見た．実は次節で述べるように，このことと同様の考え方を用いて，任意の距離空間からその‘完備拡大’と呼ばれる完備な距離空間を構成することができる．

§1.8　距離空間の完備拡大

(X, d) を距離空間とする．(X, d) は完備であることも，そうでないこともあるが，(X, d) の Cauchy 列を用いて (X, d) を含む（正確にいえば，(X, d) から等距離写像で移される距離空間を含む）完備な距離空間を構成することができる．

まず X の点 x, y, z が与えられたとき，

$$d(x, y) \geqq |d(x, z)-d(z, y)| \tag{1.8}$$

が成り立つことに注意しよう．((1.8) が成り立つことは，d が三角不等式を満たすことから直ちに導かれる．読者自ら確かめられたい.)

$C(X, d)$ を (X, d) の Cauchy 列全体から成る集合としよう．$C(X, d)$ の元 $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ を単に (x_n) のように書くことにする．$C(X, d)$ の元 (x_n), (y_n) が与えられたとき，$(d(x_n, y_n))$ は $\boldsymbol{R}$ の Euclid 計量に関する Cauchy 列となる．実際，ε を任意の正の実数とし，自然数 N を条件：

$$d(x_n, x_N) < \varepsilon/2, \qquad d(y_n, y_N) < \varepsilon/2 \qquad (\forall n \geqq N)$$

が成り立つように選べば，$n \geqq N$ のとき

$$\begin{aligned}
&|d(x_n, y_n)-d(x_N, y_N)| \\
&\quad = |d(x_n, y_n)-d(y_n, x_N)+d(y_n, x_N)-d(x_N, y_N)| \\
&\quad \leqq |d(x_n, y_n)-d(y_n, x_N)|+|d(y_n, x_N)-d(x_N, y_N)| \\
&\quad \leqq d(x_n, x_N)+d(y_n, y_N) < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\lim d(x_n, y_n)$ が定まるが，この値を $d^*((x_n), (y_n))$ とおこう．すると $(C(X, d), d^*)$ は明らかに擬距離空間となる．さて，$C(X, d)$ の元の間の関係 $\sim$ をつぎのように定義しよう．

$$(x_n) \sim (y_n) \iff d^*((x_n), (y_n)) = 0.$$

$\sim$ は明らかに同値関係となる．ここで，商集合 $C(X, d)/\sim$ を $\tilde{X}$ とおき，(x_n) を代表元とする $\tilde{X}$ の元を $\lim\limits_{n\to\infty}{}^* x_n$ または単に $\lim^* x_n$ と書こう．さて，(x_n),

(x_n'), (y_n) を $C(X, d)$ の元，$(x_n)\sim(x_n')$ とすると，$d^*((x_n), (y_n))=d^*((x_n'), (y_n))$ が成り立つ．(実際，$|d(x_n, y_n)-d(x_n', y_n)|\leqq d(x_n, x_n')$ だから $\lim d(x_n, y_n)=\lim d(x_n', y_n)$.) このことから，$(x_n)\sim(x_n')$，$(y_n)\sim(y_n')$ ならば $d^*((x_n), (y_n))=d^*((x_n'), (y_n'))$ が成り立つことがわかる．したがって，$\tilde{X}\times\tilde{X}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $\tilde{d}$ を

$$\tilde{d}(\lim{}^* x_n, \lim{}^* y_n) = d^*((x_n), (y_n))$$

によって定義することができる．すなわち，

$$\tilde{d}(\lim{}^* x_n, \lim{}^* y_n) = \lim d(x_n, y_n) \tag{1.9}$$

である．$(\tilde{X}, \tilde{d})$ は明らかに距離空間となる．

X の元 x が与えられたとき，点列 (x_n) $(x_n=x, \forall n\in\boldsymbol{N})$ は明らかに $C(X, d)$ の元となり $\lim x_n=x$，すなわち (x_n) は x に収束する．ここで $\lim^* x_n=f(x)$ とおこう．こうして X から $\tilde{X}$ への写像 f が定まるが，f は明らかに等距離写像となる．また，$C(X, d)$ の元 (x_n) が X の点 x に収束すれば，明らかに $\lim^* x_n=f(x)$ となる．したがって，もしも (X, d) が完備であれば f は全射となり，このとき (X, d) と $(\tilde{X}, \tilde{d})$ は距離空間として同一視され得ることがわかる．

また，一般に $\tilde{x}$ を $\tilde{X}$ の任意の元とするとき，$\tilde{x}$ と‘いくらでも近くに’$f(X)$ の元が存在することがわかる．実際，$\tilde{x}=\lim^* x_n$ $((x_n)\in C(X, d))$ とし ε を任意の正の実数としよう．このとき自然数 N を十分に大きくとれば，$n\geqq N$ となる任意の自然数 n に対して $d(x_n, x_N)<\varepsilon$ となるのであった．ここで，明らかに $\tilde{d}(\tilde{x}, f(x_N))\leqq\varepsilon$ が成り立つ！

さて $(\tilde{X}, \tilde{d})$ が完備距離空間であることを示そう．$(\tilde{X}, \tilde{d})$ の Cauchy 列 $(\tilde{x}_n)$ が与えられたとする．各自然数 m に対して X の元 x_m を $\tilde{d}(\tilde{x}_m, f(x_m))<2^{-m}$ が成り立つように選んでおく(選出公理を用いた!)．さて，$(\tilde{x}_n)$ は Cauchy 列だから，ε を任意の正の実数とするとき自然数 N を十分大きなものとすれば，$n\geqq N$ となる任意の自然数 n に対して $\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_N)<\varepsilon/3$ が成り立つようにできる．また，このとき $2^{-N}<\varepsilon/3$ と仮定してもよい．ここで，

$$\begin{aligned} d(x_n, x_N) = \tilde{d}(f(x_n), f(x_N)) &\leqq \tilde{d}(f(x_n), \tilde{x}_n)+\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_N)+\tilde{d}(\tilde{x}_N, f(x_N)) \\ &< 2^{-n}+\varepsilon/3+2^{-N} < \varepsilon \qquad (n\geqq N) \end{aligned}$$

が成り立つから，(x_n) は (X, d) の Cauchy 列である．$\tilde{x}=\lim^* x_n$ とおいて，Cauchy 列 $(\tilde{x}_n)$ が $\tilde{x}$ に収束することを示そう．上で見たことからわかるように

$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(f(x_n),\tilde{x}_n)=0$ だから任意の正の実数 ε に対して十分大きな自然数 M をとれば $n\geqq M$ のとき $\tilde{d}(f(x_n),\tilde{x}_n)=\lim_{k\to\infty} d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon/2$ $((x_{n_k})=\tilde{x}_n)$ となるようにできる．ゆえに，十分大きな自然数 K をとり，$k\geqq K$，$n\geqq M$ のとき $d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon/2$ となるようにできる．さて，$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{x}_n)=\lim_{k\to\infty} d(x_k,x_{n_k})$ であるが，

$$(1.10)\qquad d(x_k,x_{n_k})\leqq d(x_k,x_n)+d(x_n,x_{n_k}).$$

ここで，(x_k) が (X,d) の Cauchy 列であることを用いれば，十分大きな自然数 N' $(N'\geqq\max\{M,K\})$ をとり，$k,n\geqq N'$ のとき $d(x_k,x_n)<\varepsilon/2$，$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon/2$ が成り立つようにできる．したがって，このとき (1.10) から $d(x_k,x_{nk})<\varepsilon$．ゆえに $\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{x}_n)=0$ が示された．こうして $(\tilde{X},\tilde{d})$ が完備距離空間となることがわかった．$(\tilde{X},\tilde{d})$ を (X,d) の**完備拡大** (completion) または**完備化**と呼ぶ．上にも述べたように，X の元 x に $\tilde{X}$ の元 $\lim^* x_n$ $(x_n=x,\ \forall n\in \boldsymbol{N})$ を対応させる写像 f は X から $\tilde{X}$ への等距離写像である．この写像 f によって X と $f(X)$ を同一視し，X を $\tilde{X}$ の部分距離空間とみなすことにしよう．$\tilde{X}$ は完備だから $\tilde{\tilde{X}}=\tilde{X}$ である．また X,Y を距離空間とすると明らかに $\widetilde{X\times Y}=\tilde{X}\times\tilde{Y}$ である．特に X として有理数体 $\boldsymbol{Q}$，d を $d(x,y)=|x-y|$ によって与えれば，$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{R}$ である．

上にも述べたように，X を距離空間，$\tilde{X}$ をその完備拡大とし，$\tilde{x}\in\tilde{X}$ とすると $\tilde{x}$ の‘いくらでも近く’に X の点が存在する．一般に，(Y,d) を距離空間，$S,T\subset Y$ とするとき，T の任意の点 t の‘いくらでも近く’に S の点が存在するならば，すなわち，ε を任意の正の実数とするとき t の ε 近傍 $U_\varepsilon(t)$ をとると $U_\varepsilon(t)\cap S\neq\phi$ が成り立つならば，S は T において**稠密** (dense) であるという．特に S が Y において稠密であるとき S は Y の**到る所で稠密** (everywhere dense) であるという．上で X をその完備拡大 $\tilde{X}$ の部分集合とみなすと X は $\tilde{X}$ の到る所で稠密である．(特に $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の到る所で稠密な部分集合である.)

距離空間 (X,d) と完備距離空間 (Y,d') および X から Y への連続写像 f が与えられたとき，f を‘自然に’$\tilde{X}$ から Y への写像へ‘拡張’することができるだろうか．この問題について考えるために，連続写像 f として少しばかり特別なものをとろう．

一般に，(X,d), (Y,d') を距離空間，f を X から Y への写像とするとき，任意の正の実数 ε に対して適当な正の実数 δ をとれば

$$d(x,x')<\delta \Longrightarrow d'(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

が，X の任意の元 x, x' について成り立つとする．このとき f を (X, d) から (Y, d') (あるいは X から Y) への**一様連続写像** (uniformly continuous mapping) と呼ぶ．f はこのとき明らかに連続写像となるが，逆は必ずしも成り立つとは限らない (例 1.14 参照)．f が X から Y への等距離写像ならば，f は明らかに一様連続写像である．

例 1.14 写像 $f: \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}$ を $f(x, y)=x+y$ によって与えよう．$\boldsymbol{Q}$ の計量 d としては $d(x, y)=|x-y|$ によって定められるものをとる．このとき f は一様連続である．また a を $\boldsymbol{Q}$ の元，写像 $g_a: \boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}$ を $g_a(x)=ax$ によって定められるものとすれば，g_a は一様連続である．しかし，写像 $h: \boldsymbol{Q}-\{0\}\to\boldsymbol{Q}-\{0\}$ を $h(x)=x^{-1}$ によって定めれば，h は連続ではあるが一様連続ではない．——

一般に，f を距離空間 (X, d) から距離空間 (Y, d') への一様連続写像とすれば，

$$(x_n)\in C(X, d) \Longrightarrow (f(x_n))\in C(Y, d')$$

が成り立つ (読者自ら確かめられたい)．ここで，つぎの定理が成り立つ．

定理 1.5 f を距離空間 (X, d) から完備距離空間 (Y, d') への一様連続写像とすると，(X, d) の完備拡大 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ から (Y, d') への一様連続写像 F で，$F|_X=f$ となるものが一意的に存在する．(この F を f の $\tilde{X}$ への**自然な拡張**と呼ぶ.)

証明 上に述べたように，(x_n) を (X, d) の Cauchy 列とすれば $(f(x_n))$ は (Y, d') の Cauchy 列となる．(Y, d') は完備だから $(f(x_n))$ は Y の元 y に収束する．$(x_n), (x_n')\in C(X, d)$，$(x_n)\sim(x_n') \Longrightarrow \lim f(x_n)=\lim f(x_n')$ が成り立つことを示そう．そのためには，$(x_n)\sim(x_n')$ を仮定して，任意の正の実数 ε に対して適当な自然数 N をとれば，$n\geqq N$ となる自然数 n に対して $d'(f(x_n), f(x_n'))<\varepsilon$ が成り立つことを示せばよい．さて，$(x_n), (x_n')$ はともに $\tilde{X}$ の元 $\tilde{x}$ に収束する．正の実数 δ を，$d(x, x')<\delta\ (x, x'\in X) \Longrightarrow d'(f(x), f(x'))<\varepsilon$ が成り立つようにとろう．このとき自然数 N を十分大きくとれば，$n\geqq N\ (n\in\boldsymbol{N})$ のとき

$$\tilde{d}(x_n, \tilde{x}) < \delta/2, \qquad \tilde{d}(x_n', \tilde{x}) < \delta/2$$

となる．ここで $d(x_n, x_n')\leqq\tilde{d}(x_n, \tilde{x})+\tilde{d}(\tilde{x}, x_n')<\delta$ だから $d'(f(x_n), f(x_n'))<\varepsilon$ が成り立つ．ここで，写像 $F: \tilde{X}\to Y$ を $\tilde{X}$ の元 $\tilde{x}=\lim x_n$ に対して $F(\lim x_n)=\lim f(x_n)$ とおいて定めれば，明らかに $F|_X=f$ となる．F が一様連続写像となることを示そう．ε を与えられた正の実数とし，δ を，正の実数で $d(x, x')<\delta\ (x, x'\in X) \Longrightarrow d'(f(x), f(x'))<\varepsilon/3$ を成り立たせるようなものとする．ここで，

$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}') < \delta/3$ $(\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}) \Longrightarrow d'(F(\tilde{x}), F(\tilde{x}')) < \varepsilon$ が成り立つことを示す．$\tilde{x} = \lim x_n$，$\tilde{x}' = \lim x_n{}'$ $((x_n), (x_n{}') \in C(X, d))$ としよう．自然数 N を十分大きくとれば $n \geqq N$ $(n \in \boldsymbol{N})$ のとき $\tilde{d}(\tilde{x}, x_n) < \delta/3$，$\tilde{d}(\tilde{x}', x_n{}') < \delta/3$ が成り立つようにすることができる．また，$F(\tilde{x}) = \lim f(x_n)$，$F(\tilde{x}') = \lim f(x_n{}')$ だから，ここでさらに

$$d'(F(\tilde{x}), f(x_n)) < \varepsilon/3, \qquad d'(F(\tilde{x}'), f(x_n{}')) < \varepsilon/3 \qquad (n \geqq N)$$

が成り立つとしてよい．さて

$$d(x_n, x_n{}') \leqq \tilde{d}(x_n, \tilde{x}) + \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \tilde{d}(\tilde{x}', x_n{}') < \delta$$

となるから

$$\begin{aligned} &d'(F(\tilde{x}), F(\tilde{x}')) \\ &\quad \leqq d'(F(\tilde{x}), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(x_n{}')) + d'(f(x_n{}'), F(\tilde{x}')) < \varepsilon. \end{aligned}$$

こうして F が一様連続であることが示された．逆に $\tilde{X}$ から Y への (一様) 連続写像 F' があり $F'|_X = f$ となれば (X, d) の Cauchy 列 (x_n) に対して $F'(\lim x_n) = \lim F'(x_n) = \lim f(x_n)$ となるから上のような F の一意性は明らかである．▌

系　(X, d), $(\tilde{X}, \tilde{d})$, (Y, d'), f は定理の通りとし，さらにつぎの (i), (ii) が満たされているとする．

(i)　f は等距離写像である

(ii)　$f(X)$ は Y の到る所で稠密である．

すると f の $\tilde{X}$ への拡張 F は $\tilde{X}$ から Y の上への等距離写像となる．

問題 1.20　上の系を証明せよ．——

完備な距離空間においては Cauchy 点列を‘追いつめる’ことができる．このことから完備な距離空間の持ついろいろな性質が導かれる．ここではその一つとして，微分方程式が或る条件の下では一意的な解を持つことを証明するためにも用いられる‘縮小写像の原理’について説明しよう (例 4.3 参照)．

(X, d) を距離空間，f を X からそれ自身への写像とする．ここで，X の任意の元 x, y に対して x, y には依存しないできまる正の実数 $c < 1$ があって

$$d(f(x), f(y)) \leqq c\,d(x, y)$$

が成り立つとき f を (X, d) (または X) の**縮小写像** (contraction) と呼ぶ．縮小写像は明らかに一様連続である．

定理 1.6 (縮小写像の原理)　f を完備距離空間 (X, d) $(X \neq \phi)$ の縮小写像とす

ると，X の元 x で $f(x)=x$ となるもの (f の‘固定点’) が一意的に存在する．

証明 $x_1\in X$ をとり $x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，…，$x_{k+1}=f(x_k)$ ($k\in\boldsymbol{N}$) としよう．f は縮小写像だから

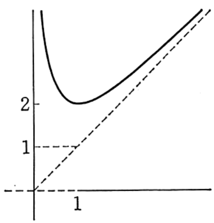
$$d(f(x),f(y))\leqq c\,d(x,y),\qquad c<1\qquad (x,y\in X)$$

を満たすような正の実数 c がある．ここで点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が Cauchy 列となることが示される．実際 $N,r\in\boldsymbol{N}$ とすると

$$\begin{aligned}d(x_N,x_{N+r})&\leqq c^{N-1}d(x_1,x_{1+r})\\&\leqq c^{N-1}(d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_r,x_{1+r}))\\&\leqq c^{N-1}d(x_1,x_2)(1+c+c^2+\cdots+c^{r-1})\\&=d(x_1,x_2)c^{N-1}(c^r-1)/(c-1)\leqq d(x_1,x_2)c^{N-1}(1-c)^{-1}\end{aligned}$$

となるから，任意の正の実数 ε が与えられたとき自然数 N を $c^{N-1}(1-c)^{-1}d(x_1,x_2)<\varepsilon$ が満たされるようにとれば $d(x_N,x_{N+r})<\varepsilon$ となる．ここで $x=\lim x_n$ とすれば，$f(x)=f(\lim x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=x$ となり $f(x)=x$ が成り立つ．このような x が一意的に定まることを示そう．いま $y\in X$, $f(y)=y$ とすれば $d(f(x),f(y))=d(x,y)$．ところが $d(f(x),f(y))\leqq c\,d(x,y)$ だから $d(x,y)\cdot(1-c)=0$．ここで $1-c>0$ より $d(x,y)=0$ すなわち $x=y$．▌

注意 $X=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x\geqq 1\}$ を 1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間とすれば，X は明らかに完備距離空間である．ここで，X からそれ自身への写像を f として，$f(x)=x+1/x$ によって定められるものをとろう．ここで，$1\leqq x\leqq y$ とすると $|f(y)-f(x)|=f(y)-f(x)=(y-x)-(1/x-1/y)<|y-x|$ となるが，X の元 x で $f(x)=x$ となるものは存在しない．(f は一様連続であるが縮小写像ではない.)



さて，p を素数，d_p を $\boldsymbol{Q}$ の p 進計量とする．$(\boldsymbol{Q},d_p)$ の完備拡大 $(\tilde{\boldsymbol{Q}},\tilde{d}_p)$ をとり $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ を $\boldsymbol{Q}_p$ と表わす．$\boldsymbol{Q}_p$ は§1.9 で示すように体の構造を持ち，**p 進体** (p-adic number field) と呼ばれる．p 進体の性質は数論でよく用いられる．

§1.9　p 進体

p を素数，d_p を $\boldsymbol{Q}$ の p 進計量，$(\boldsymbol{Q}_p, \tilde{d}_p)$ を距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ の完備拡大とする．$\boldsymbol{Q}_p$ の元 $\tilde{x}=\lim x_n$，$\tilde{y}=\lim y_n$ $((x_n), (y_n)$ は $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ の Cauchy 列$)$ に対して $\tilde{d}_p(\tilde{x}, \tilde{y})=\lim d_p(x_n, y_n)$ である．$\tilde{d}_p$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の **p 進計量**と呼ぶことにする．§1.8 でも述べたように，$\boldsymbol{Q}$ の元 a に Cauchy 列 $(a_n)=(a, a, \cdots)$ の $\boldsymbol{Q}_p$ における極限点 $\lim a_n$ を対応させることによって $\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の部分距離空間とみなすことができる．ここで，$\boldsymbol{Q}_p$ の元 $\tilde{x}$ に対し $\tilde{d}_p(\tilde{x}, 0)=\tilde{v}_p(\tilde{x})$ とおいて，これを $\tilde{x}$ の **p 進付値**と呼ぶことにしよう．明らかに，$x \in \boldsymbol{Q}$ のとき $\tilde{v}_p(x)=v_p(x)$ である．また $(\boldsymbol{Q}_p, \tilde{d}_p)$ は距離空間だから $\tilde{v}_p(\tilde{x})=0$ と $\tilde{x}=0$ とは同値になる．さらに $\tilde{v}_p$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の各元 $\tilde{x}$ に $\tilde{v}_p(\tilde{x}) \in \boldsymbol{R}$ を対応させる写像とすれば，$\tilde{v}_p$ は $(\boldsymbol{Q}_p, \tilde{d}_p)$ から1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ への連続写像となる（問題1.10参照）．$\boldsymbol{Q}_p^*=\boldsymbol{Q}_p-\{0\}$，$\boldsymbol{R}_+=\{x \in \boldsymbol{R} \mid x>0\}$ とおけば，$\tilde{v}_p(\boldsymbol{Q}_p^*) \subset \boldsymbol{R}_+$ である．ここで，$\boldsymbol{R}_+$ から $\boldsymbol{R}$ への写像として $-\log_p$ をとろう（すなわち $\boldsymbol{R}_+$ の元 x に対して $\boldsymbol{R}$ の元 $-\log_p x$ を対応させる写像である）．$-\log_p$ は $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 $\boldsymbol{R}_+$ から $\boldsymbol{R}$ の上への位相写像である．写像 $\tilde{e}_p: \boldsymbol{Q}_p^* \to \boldsymbol{R}$ を，$\tilde{e}_p=-\log_p \circ \tilde{v}_p$ とおいて定めよう．$\tilde{e}_p$ は連続写像である．また明らかに $\tilde{e}_p|_{\boldsymbol{Q}^*}=e_p$ $(\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{Q}-\{0\})$ である．e_p の定義から明らかなように，$e_p(\boldsymbol{Q}^*)=\boldsymbol{Z}$ であるが，$\boldsymbol{Q}^*$ が $\boldsymbol{Q}_p^*$ の到る所で稠密であるから $\tilde{e}_p(\boldsymbol{Q}_p^*)=\boldsymbol{Z}$ も成り立つことがわかる（読者自ら確かめられたい）．

さて，$\tilde{x}=\lim x_n$，$\tilde{y}=\lim y_n$ $((x_n), (y_n) \in C(\boldsymbol{Q}, d_p))$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の元とすると (x_n+y_n)，(x_n-y_n)，$(x_n y_n)$ はまた $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ の Cauchy 列となる．（(x_n+y_n)，(x_n-y_n) については明らかである．$(x_n y_n)$ が Cauchy 列になることは

$$\begin{aligned} d(x_n y_n, x_m y_m) &= v_p(x_n y_n - x_m y_m) \\ &= v_p((x_n y_n - x_m y_n) + (x_m y_n - x_m y_m)) \\ &\leqq d_p(x_n, x_m) v_p(y_n) + v_p(x_m) d_p(y_n, y_m) \end{aligned}$$

となること，また $v_p(y_n), v_p(x_m)$ がそれぞれ $\tilde{v}_p(\tilde{y}), \tilde{v}_p(\tilde{x})$ に収束することから容易にわかる．）また，$(x_n) \sim (x_n')$，$(y_n) \sim (y_n') \Longrightarrow (x_n+y_n) \sim (x_n'+y_n')$，$(x_n-y_n) \sim (x_n'-y_n')$，$(x_n y_n) \sim (x_n' y_n')$ が成り立つこと，さらに $\tilde{x}+\tilde{y}=\lim(x_n+y_n)$，$\tilde{x}-\tilde{y}=\lim(x_n-y_n)$，$\tilde{x}\tilde{y}=\lim x_n y_n$ とおけば，$\boldsymbol{Q}_p$ はこうして決められた和，（差），積に関して単位的可換環となり $\boldsymbol{Q}$ を部分環として含むことが容易にわかる．ここで $\tilde{x} \neq 0$ のとき $\tilde{x}$ の逆元が $\boldsymbol{Q}_p$ の中に存在することを示そう．$\tilde{x}$

$\neq 0$ ならば $\tilde{v}_p(\tilde{x})\neq 0$ だから $\tilde{x}=\lim x_n$ とするとき十分大きな n に対しては $v_p(x_n)\neq 0$, すなわち $x_n\neq 0$ となることが容易にわかる. ここで, 必要ならば Cauchy 列 (x_n) をそれと同値なものととり換えて $x_n\neq 0$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ としてもよい. $\tilde{v}_p(\tilde{x})=\tilde{d}_p(\tilde{x}, 0)>0$ だから正の実数 α で $\tilde{v}_p(\tilde{x})>\alpha>0$ を満たすものがある. ここで自然数 N を適当に選べば, N 以上の任意の自然数 n に対しては $v_p(x_n)\geqq\alpha$ が成り立つ. $n, m\geqq N$ とすると $v_p(x_n), v_p(x_m)\neq 0$ で

$$\begin{aligned} d_p(x_n{}^{-1}, x_m{}^{-1}) &= v_p(x_n{}^{-1}-x_m{}^{-1}) = v_p(x_m-x_n)v_p(x_n)^{-1}v_p(x_m)^{-1} \\ &\leqq d_p(x_m, x_n)\alpha^{-2} \end{aligned}$$

が成り立つから $(x_n{}^{-1})$ は明らかに Cauchy 列である. さらに, $(x_n)\sim(x_n')$, x_n, $x_n'\neq 0$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ ならば, 上と同様の論法によって $(x_n{}^{-1})\sim(x_n'^{-1})$ が成り立つから, $\tilde{x}\neq 0$, $\tilde{x}=\lim x_n$, $x_n\neq 0$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ のとき $\tilde{x}^{-1}=\lim x_n{}^{-1}$ とおけば, $\tilde{x}^{-1}$ は $\boldsymbol{Q}_p$ の元であり, $\tilde{x}\tilde{x}^{-1}=\tilde{x}^{-1}\tilde{x}=1$ となる! こうして $\boldsymbol{Q}_p$ は体の構造を持つことがわかった. $\tilde{v}_p$ が $\boldsymbol{Q}_p$ の非 Archimedes 的付値となることは定義から直ちに確かめられる. また, $\tilde{x}=\lim x_n$, $\tilde{y}=\lim y_n$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の元とするとき

$$\begin{aligned} \tilde{d}_p(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \lim d_p(x_n, y_n) = \lim v_p(x_n-y_n) = \lim d_p(x_n-y_n, 0) \\ &= \tilde{d}_p(\tilde{x}-\tilde{y}, 0) = \tilde{v}_p(\tilde{x}-\tilde{y}) \end{aligned}$$

だから定理 1.3 によって $\boldsymbol{Q}_p$ の加法, 減法, 乗法および 0 でない元による除法はすべて連続写像となる.

$\boldsymbol{Q}_p$ においては $\left(\sum_{i=k}^{k+n} a_i p^i\right)_{n\in \boldsymbol{N}}$ $(k\in \boldsymbol{Z},\ a_i\in \bar{\boldsymbol{N}},\ 0\leqq a_i\leqq p-1)$ は収束する (§1.7 例 1.11). その収束値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{k+n} a_i p^i$ を $\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ あるいは $a_k p^k+a_{k+1}p^{k+1}+\cdots$ などと表わす. たとえば,

$$(1-p^k)^{-1} = 1+p^k+p^{2k}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p^{kn}$$

となる. 特に $p=2$ の場合,

$$-1 = 1+2+2^2+2^3+\cdots,$$

一般に,

$$-1 = (p-1)(1+p+p^2+\cdots) = \sum_{n=0}^{\infty}(p-1)p^n.$$

また $p=3$ のとき

$$1/2 = 1+(1-3)^{-1} = 2+3+3^2+\cdots.$$

一般に a を p と素の自然数とするとき適当な自然数 k をとれば p^k-1 が a の倍数になるようにすることができる(すなわち $p^k\equiv 1\,(a\boldsymbol{Z})$ を満たすような自然数 k が存在する．このことはよく知られているが，証明は代数学の書物を参照されたい)．したがってこのとき $p^k-1=ab$,

$$a^{-1}=-b(1-p^k)^{-1}=-b\sum_{n=0}^{\infty}p^{kn}.$$

以上のことから容易にわかるように，$a\in\boldsymbol{Q}^*$, $e_p(a)=k$ とすると，a は

$$a=\sum_{i=k}^{\infty}a_ip^i \qquad (a_k\neq 0,\ \ 0\leqq a_i\leqq p-1)$$

のように表わされる．実は同様のことが $\boldsymbol{Q}_p{}^*$ の元についても成り立つ．$\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p{}^*$, $\tilde{e}_p(\tilde{a})=k$ としよう ($k\in\boldsymbol{Z}$ である)．ここで，$\tilde{a}$ と‘いくらでも近く’に $\boldsymbol{Q}$ の元があることを用い，$a_1\in\boldsymbol{Q}$ を

$$\tilde{d}_p(\tilde{a},a_1)\leqq p^{-(k+1)}$$

を満たすようにとろう．$\tilde{d}_p(\tilde{a},a_1)=\tilde{v}_p(\tilde{a}-a_1)<\tilde{v}_p(\tilde{a})=p^{-k}$ で，$\tilde{v}_p$ が非 Archimedes 的付値であることを用いると，

$$v_p(a_1)=\tilde{v}_p(a_1)=\tilde{v}_p((a_1-\tilde{a})+\tilde{a})=p^{-k}$$

となる(問題1.17参照)．ゆえに，$a_1=\sum_{i=k}^{\infty}a_{1i}p^i$, $a_{1k}\neq 0$, $\tilde{a}=a_1+(\tilde{a}-a_1)$, $\tilde{v}_p(\tilde{a}-a_1)\leqq p^{-(k+1)}$．いま，$\tilde{a}\neq a_1$, $\tilde{v}_p(\tilde{a}-a_1)=p^l$ とすれば $l>k$．ゆえに，上と同様にして $\boldsymbol{Q}$ の元 a_2 で $v_p(a_2)=p^{-l}$, しかも $\tilde{v}_p(\tilde{a}-a_1-a_2)\leqq p^{-(l+1)}$ を満たすようなものが存在することがわかる．ゆえに，$\tilde{a}=a_1+a_2+(\tilde{a}-(a_1+a_2))$．こうして，$\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p{}^*-\boldsymbol{Q}^*$ ならば，$\tilde{a}=a_1+a_2+\cdots+a_n+\tilde{a}'$, $a_i\in\boldsymbol{Q}$, $v_p(a_i)<v_p(a_{i+1})$, $\tilde{v}_p(\tilde{a}')<v_p(a_n)$ を満たすような a_i $(i=1,\cdots,n)$ が存在する．n についてこの操作を帰納的に続け(厳密には帰納定理(第I部集合論を参照)を用いる)，$\boldsymbol{Q}$ の点列 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を作ることができる．この点列は $(\boldsymbol{Q},d_p)$ の Cauchy 列となること，その極限は $\tilde{a}$ となることが容易に確かめられる．したがって，$\tilde{a}$ は

$$\tilde{a}=\sum_{i=k}^{\infty}\alpha_ip^i \qquad (\alpha_i\in\bar{\boldsymbol{N}},\ \ 0\leqq\alpha_i\leqq p-1,\ \ \alpha_k\neq 0)$$

のように表わされる．他方，$a_i, b_i\in\bar{\boldsymbol{N}}$, $0\leqq a_i, b_i\leqq p-1$ $(i\in\boldsymbol{Z})$ に対して

$$\sum_{i=k}^{\infty}a_ip^i=\sum_{i=l}^{\infty}b_ip^i \iff k=l,\quad a_i=b_i\ \ (i=k,k+1,\cdots)$$

が成り立つことも容易に確かめられるので，つぎの定理が成り立つ．

定理 1.7　p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ は $\boldsymbol{Q}$ を部分体として含む体であり，その加法，減法，乗法および 0 ではない元による除法はいずれも $\boldsymbol{Q}_p \times \boldsymbol{Q}_p$ から $\boldsymbol{Q}_p$ への連続写像である．また $\boldsymbol{Q}_p$ の任意の元 $\tilde{a}$ $(\neq 0)$ は，

$$\tilde{a} = \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \qquad (k \in \boldsymbol{Z},\ a_i \in \bar{\boldsymbol{N}},\ 0 \leqq a_i \leqq p-1)$$

のように一意的に表わされる．このとき $\tilde{v}_p(\tilde{a}) = p^{-k}$．——

こうして各素数 p に応じて完備な体 $\boldsymbol{Q}_p$ が得られ，それらのおのおのが p に関係した‘個性’を持つのである．$\boldsymbol{Q}_p$ の代数的性質についても述べるべきことは多いが，それは数論の書物にゆずり，本来のテーマである位相についての考察にもどろう．

§1.10　閉　包

収束列の概念が重要であることは定理 1.4 からも見られよう．Cauchy 列が必ず収束するような距離空間が完備距離空間であった．そして，$\boldsymbol{Q}$ をいろいろな計量に関して完備化することによって $\boldsymbol{R}$ や p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ が得られた．いま (X, d) を距離空間，S を X の部分集合とし，X の点 x に関するつぎの条件を考える．

(A)　$\exists (x_n) \in C(X, d),\quad x_n \in S\quad (\forall n \in \boldsymbol{N}),\quad \lim x_n = x.$

すなわち，点 x を極限点とするような収束列 (x_n) で，各 x_n は S の元となるようなものが存在するという条件である．上の条件 (A) はつぎの条件 (A′) と同値であることがわかる．

(A′)　$\forall \varepsilon > 0,\quad S \cap U_\varepsilon(x) \neq \phi.$

(A′) は，任意の正の実数 ε に対して，x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ に含まれる S の元 s が存在することを主張している．

問題 1.21　距離空間 (X, d)，X の部分集合 S および X の点 x に関する上記の命題 (A), (A′) が同値であることを示せ．——

上で条件 (A) (または (A′)) を満たすような X の点 x を S の (d に関する) **触点** (adherent point) と呼ぶ．x が S の元であれば当然ながら x は S の触点となる．さて点 x についてつぎの条件を考えよう．

(A″)　$\forall \varepsilon > 0,\quad U_\varepsilon(x) \cap (S - \{x\}) \neq \phi.$

すなわち(A″)は任意の正の実数 ε に対して x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ に属する S の点 s で x とは異なるものが存在するという命題である．明らかに (A″) $\Longrightarrow$ (A′) が成り立つがその逆は必ずしも成り立つとは限らない(例 1.15, 1.16 参照)．x が条件 (A″) を満たすとき，x は S の (d に関する) **集積点** (accumulating point) と呼ばれる．また，x が条件 (A′) を満たすが条件 (A″) は満たさないとき，x を S の**孤立点** (isolated point) と呼ぶ．x が S の孤立点となるための必要十分条件は適当な $\varepsilon>0$ をとると $U_\varepsilon(x)\cap S=\{x\}$ となること，すなわち $x\in S$, しかも x の‘十分小さい近傍’は x 以外の S の点を含まないということである．S の (d に関する) 触点全体から成る X の部分集合を S の (d に関する) **閉包** (closure) と呼び $Cl_d(S)$, $Cl(S)$ あるいは単に $\bar{S}$ と表わす．

例 1.15 (X, d) を距離空間, $x\in X$, $S=\{x\}$ とすると，$\bar{S}=S$ となる．このとき x は $\{x\}$ の触点であるが $\{x\}$ の集積点ではない．x はしたがって S の孤立点である．

例 1.16 $(\boldsymbol{R}, d)$ を1次元 Euclid 空間, $S=\{x\in \boldsymbol{R}\,|\,0<x\}$ とすると，$\bar{S}=\{x\in \boldsymbol{R}\,|\,0\leqq x\}$ となり $\bar{S}$ の各点は S の集積点となる．

例 1.17 $\boldsymbol{Q}_p$ を p 進体, $\tilde{d}_p$ をその p 進計量とし $S=\{x\in \boldsymbol{Q}_p\,|\,\exists n(n\in \boldsymbol{N}\wedge x=p^n)\}$ とする．(S は $p, p^2, p^3, \cdots, p^n, \cdots$ 全体から成る $\boldsymbol{Q}_p$ の部分集合である.) このとき $\bar{S}=S\cup\{0\}$ となり，0 は S のただ一つの集積点である．

問題 1.22 (X, d) を距離空間, $S\subset X$ とするとき，S が X の稠密な部分集合となるためには，$\bar{S}=X$ となることが必要十分であることを示せ．

定理 1.8 (X, d) を距離空間, S, T を X の部分集合とすると，つぎの (Cl 1)-(Cl 4) が成り立つ．

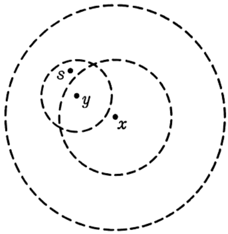
(Cl 1) $\overline{\phi}=\phi$

(Cl 2) $\overline{S\cup T}=\bar{S}\cup\bar{T}$

(Cl 3) $S\subset\bar{S}$

(Cl 4) $\bar{\bar{S}}=\bar{S}$.

証明 (Cl 1)-(Cl 3) は容易に確かめられるから読者に任せよう．(Cl 4) を示すためには，$\bar{S}\subset\bar{\bar{S}}$ は明らかに成り立つから $\bar{\bar{S}}\subset\bar{S}$ を示せばよい．x を $\bar{\bar{S}}$ の任意の元とする．ε を任意の正の実数とすると $U_{\varepsilon/2}(x)$ に含まれる $\bar{S}$ の元 y が存在する．このとき $U_{\varepsilon/2}(y)$ に含まれる S の元 s が存在するが，$d(s, x)\leqq d(s, y)+d(y, x)$



$<\varepsilon$ だから $s\in S\cap U_\varepsilon(x)$．したがって $x\in\bar{S}$，ゆえに $\bar{\bar{S}}\subset\bar{S}$ が示された．▌

系　S, T を距離空間 X の部分集合，$S\subset T$ とすれば $\bar{S}\subset\bar{T}$．

証明　$T=S\cup(T-S)$ だから (Cl 2) により $\bar{T}=\bar{S}\cup\overline{(T-S)}\supset\bar{S}$．▌

問題 1.23　距離空間 (X, d)，X の部分集合 S, T が与えられたとき，S が T において稠密となるための必要十分条件は $T\subset\bar{S}$ が成り立つことであることを示せ．——

(X, d) を距離空間，$S\subset X$ とする．ここで X の任意の点 x および任意の正の実数 ε に対して $U_\varepsilon(x)\not\subset\bar{S}$ が成り立つならば，S は (X において) **粗** (nowhere dense) であるという．1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ において粗である．また，n を任意の自然数とし $n^{-1}\boldsymbol{Z}=\{x\in\boldsymbol{R}\mid nx\in\boldsymbol{Z}\}$ とおくと $n^{-1}\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ において粗である．したがって $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の可算個の粗な部分集合 $\boldsymbol{Z}, 2^{-1}\boldsymbol{Z}, 3^{-1}\boldsymbol{Z}, \cdots$ の和集合となる．$\boldsymbol{R}$ 自身は可算個の粗な部分集合の和集合となるだろうか．この問に否定的に答えるのがつぎの定理である．

定理 1.9 (Baire)　(X, d) を完備距離空間 ($X\neq\phi$)，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ ($n\in\boldsymbol{N}$) を X の粗な部分集合とし，$S=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}S_n$ とすると，$X-S$ は X の到る所で稠密である．

証明　x を X の任意の元，a を任意の正の実数とし，$U_a(x)$ の中に $X-S$ の点が含まれることを示そう．S_1 は粗だから $U_a(x)\not\subset\bar{S}_1$，ゆえに $U_a(x)$ の元 x_1 で $x_1\notin\bar{S}_1$ となるものがある．ここで，$a_1>0$ を十分小さくとれば $U_{a_1}(x_1)\cap S_1=\phi$ となる．ここで $U_{a_1}(x_1)\subset U_a(x)$ しかも $a_1<2^{-1}a$ が成り立つように a_1 をとることができる．$U_{a_1}(x_1)$ と S_2 について同様に考え，$x_2\in U_{a_1}(x_1)$ と正の実数 a_2 を適当に選べば，$U_{a_2}(x_2)\subset U_{a_1}(x_1)$，$a_2<2^{-1}a_1$，さらに $U_{a_2}(x_2)\cap S_2=\phi$ が成り立つ．こうして (帰納定理により) 点列 (x_n) および数列 (a_n) を選び，各 $n\in\boldsymbol{N}$

について $U_{a_{n+1}}(x_{n+1}) \subset U_{a_n}(x_n)$，$a_{n+1} < 2^{-1}a_n$，$U_{a_n}(x_n) \cap S_n = \phi$ がそれぞれ成り立つようにできる．点列 (x_n) は明らかに (X, d) の Cauchy 列だから $\lim x_n = y$ が存在する．$y \in \bigcap_{n\in N} U_{a_n}(x_n)$ だから $y \notin \bigcup_{n\in N} S_n = S$．ゆえに $y \in U_a(x) \cap (X-S)$ となって定理が証明された．▌

系　(X, d) を孤立点を持たない完備距離空間 $(X \neq \phi)$ とすると X の濃度は非可算である．

問題 1.24　上の系を証明せよ．[ヒント] 距離空間 X が孤立点を持たなければ X の各点 x のシングルトン $\{x\}$ は X において粗であることを示し，Baire の定理を用いるとよい．

問題 1.25　p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ に等しいことを示せ．[ヒント] $\boldsymbol{Q}_p$ において 0 は孤立点ではないこと，また a を定められた $\boldsymbol{Q}_p$ の元とするとき $\boldsymbol{Q}_p$ の各元 x に $x+a$ を対応させる写像は $\boldsymbol{Q}_p$ からそれ自身の上への位相写像であることを示し，さらに $\boldsymbol{Q}_p$ は孤立点を持たないことを示すとよい．また $\boldsymbol{Q}$ の点列全体から成る集合 $\boldsymbol{Q}^N$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ と等しいことを用いるとよい（第I部定理 6.10 参照）．——

距離空間 (X, d) が与えられたとき X の部分集合 S にその閉包 $\bar{S} = Cl(S)$ を対応させることによって X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ からそれ自身への写像（それを Cl_d または Cl と書いて，計量 d によって定まる‘閉包写像’と呼ぼう）が得られるが，定理 1.8 によって閉包写像は非常に簡潔できれいな性質を持つことがわかる．また Baire の定理からも見られるように，距離空間 (X, d) の深い性質を調べるのに閉包写像を有効に用いることができる．閉包という概念の重要性は，つぎの定理からも明らかになる．

定理 1.10　(X, d), (Y, d') を距離空間，f を X から Y への写像とするとつぎの (i), (ii) が成り立つ．

(i)　f が X の点 x で連続であるための必要十分条件は X の任意の部分集合 S について

$$x \in Cl_d(S) \Longrightarrow f(x) \in Cl_{d'}(f(S))$$

が成り立つことである

(ii)　f が (X, d) から (Y, d') への連続写像となるための必要十分条件は，X の任意の部分集合 S について

$$f(Cl_d(S)) \subset Cl_{d'}(f(S))$$

が成り立つことである．

証明　(i) が示されれば (ii) が成り立つことは明らかだから (i) が成り立つことを証明しよう．まず f が X の点 x で連続であるとし，$x \in Cl_d(S)$ とする．ε を任意の正の実数とするとき，正の実数 δ を適当にとれば

$$f(U_\delta^d(x)) \subset U_\varepsilon^{d'}(f(x))$$

が成り立つ ($U_\delta^d(x)$ は x の d に関する δ 近傍，$U_\varepsilon^{d'}(f(x))$ は $f(x)$ の d' に関する ε 近傍である)．ここで，

$$U_\delta^d(x) \cap S \neq \phi$$

だから $s \in U_\delta^d(x) \cap S$ とすると $f(s) \in U_\varepsilon^{d'}(f(x)) \cap f(S)$ すなわち $U_\varepsilon^{d'}(f(x)) \cap f(S) \neq \phi$．$\varepsilon$ は任意の正の実数だから $f(x) \in Cl_{d'}(f(S))$．

つぎに f が x で連続ではないと仮定しよう．このとき適当な正の実数 ε をとると，任意の正の実数 δ に対して，

$$f(U_\delta^d(x)) - U_\varepsilon^{d'}(f(x)) \neq \phi$$

が成り立つ．δ として $1, 1/2, 1/2^2, \cdots, 1/2^n, \cdots$ をとり，$U_{2^{-n}}^d(x)$ の元 x_n を $f(x_n) \notin U_\varepsilon^{d'}(f(x))$ となるように選ぼう (選出公理を用いる)．ここで，S を $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 全体から成る X の部分集合とすれば，明らかに $x \in Cl_d(S)$ だが $f(x) \notin Cl_{d'}(f(S))$ となる．こうして (i) が成り立つことが示された．▌

定理 1.8, 1.10 は距離空間という世界から飛翔し，位相空間というより広い宇宙にいたるためのステップとなるのだが，これについては第2章で述べよう．

第2章　位 相 空 間

§2.1　閉包写像と位相空間

第1章では Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$, 関数の空間 $S_2(a, b)$, p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ などいろいろの距離空間について述べた. §1.10 の定理 1.8 では距離空間 (X, d) の部分集合 S の閉包が四つの簡潔で美しい性質 (Cl 1)-(Cl 4) を持つことが示され, 定理 1.10 では距離空間 X から距離空間 Y への写像 f が連続であるか否かを閉包の概念を利用すると簡潔にいい表わせることが示された. 一般に集合 X とそのべき集合 $\mathcal{P}(X)$ から $\mathcal{P}(X)$ 自身への写像 Cl が定理 1.8 の (Cl 1)-(Cl 4) と同様の性質を持つとしたら X についてどのようなことがいえるだろうか. もしも (Cl 1)-(Cl 4) のみを仮定して得られる定理があれば, それは特に X を計量 d を持つ距離空間とし, Cl を d によって定まる閉包写像とした場合にも成り立つはずである. このような見地から, ここでは Kuratowski に従ってつぎのような定義をしよう.

集合 X と, 写像 $Cl:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ が与えられ, つぎの条件 (Cl 1)-(Cl 4) が満たされているとする.

(Cl 1)　$Cl(\phi)=\phi$

(Cl 2)　$Cl(S\cup T)=Cl(S)\cup Cl(T)\quad (S, T\in\mathcal{P}(X))$

(Cl 3)　$Cl(S)\supset S\quad (S\in\mathcal{P}(X))$

(Cl 4)　$Cl\circ Cl=Cl.$

このとき順序対 (X, Cl) (または略して単に X) を**位相空間** (topological space) と呼び, X を (X, Cl) の**台** (support), Cl を (X, Cl) (または X) の**閉包写像** (closure mapping) と呼ぶ. Cl はまた Cl_X とも書かれる.

X の部分集合 S に対して $Cl(S)$ は $\bar{S}$ または S^a とも書かれ, S の**閉包** (closure) と呼ばれる. 上の (Cl 1)-(Cl 4) は**閉包の公理** (axioms of closures) と呼ばれ, (Cl 2) は**加法律** (additive law), (Cl 3) は**包含律** (inclusion law), (Cl 4) は**べき等律** (idempotent law) と呼ばれる. また $S, T\subset X$, $S\subset T$ のとき $\bar{S}\subset\bar{T}$ が成り

立つことは，定理1.8系の証明と全く同じ論法によって示される．

(X, d) を距離空間，Cl を計量 d によって定まる閉包写像とすれば (X, Cl) は位相空間である．このとき (X, Cl) を‘距離空間 (X, d) に対応する位相空間’と呼び，場合によっては同じ X で X を台とする距離空間，位相空間のどちらをも表わすことにする．また位相空間 (X, Cl) の閉包写像が X の計量 d によって定まるものであるとき，(X, Cl) を**計量化可能** (metrizable) な位相空間または単に距離空間と呼ぶ．

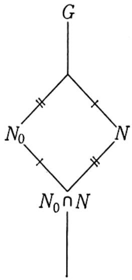
例 2.1 X を集合，$Cl:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ を $Cl=1_{\mathcal{P}(X)}$，すなわち $Cl(S)=S$ $(S\subset X)$ とすれば (X, Cl) は位相空間となる．この (X, Cl) を X を台とする**離散** (discrete) (位相) 空間と呼ぶ．離散距離空間は離散位相空間の例である．

例 2.2 X を集合，$Cl(\phi)=\phi$, $Cl(S)=X$ $(S\subset X,\ S\neq\phi)$ とおけば (X, Cl) は位相空間となる．この位相空間を X を台とする**密着** (concrete) (位相) 空間と呼ぶ．

問題 2.1 (X, Cl) を密着位相空間とすると (X, Cl) が計量化可能であるための必要十分条件は $|X|\leqq 1$ であることを示せ．

例 2.3 G を群，$\tilde{N}=\tilde{N}(G)$ を G の指数有限正規部分群全体から成る集合とする．S を G の部分集合，$N\in\tilde{N}$ とするとき，$NS=\{g\in G\mid \exists n\exists s(n\in N\wedge s\in S\wedge g=ns)\}$ とおく $(N\phi=\phi)$．特に S がシングルトン $\{s\}$ のとき $N\{s\}$ を Ns と書く．G の単位元 e は N に含まれるから，$NS\supset S$ となる．また明らかに $N(S\cup T)=NS\cup NT$ $(S, T\subset G)$．ここで，$Cl(S)=\bigcap_{N\in\tilde{N}} NS$ とおこう．S を空集合とは異なる G の部分集合とし，x を G の元としよう．すると，$x\in Cl(S)\Leftrightarrow \forall N(N\in\tilde{N}\Longrightarrow x\in NS)\Leftrightarrow\forall N(N\in\tilde{N}\Longrightarrow Nx\cap S\neq\phi)$ が成り立つ．このとき，$Cl(\phi)=\phi$, $Cl(S)\supset S$ がともに成り立つことは明らかである．$Cl\circ Cl=Cl$ が成り立つことを示そう．$x\in Cl(Cl(S))$ $(S\neq\phi)\Longrightarrow x\in Cl(S)$ を示せばよい．N を $\tilde{N}$ の任意の元としよう．$x\in Cl(Cl(S))\Longrightarrow Nx\cap Cl(S)\neq\phi$，ゆえに N の元 n，$Cl(S)$ の元 y を適当にとれば $nx=y$ となる．ところが $y\in Cl(S)$ だから $Ny\cap S\neq\phi$，したがって N の元 n'，S の元 s を適当にとれば $n'y=s$ となる．ゆえに $nx=n'^{-1}s$，$n'nx=s$，したがって $Nx\cap S\ni s$．こうして任意の $N\in\tilde{N}$ に対して $Nx\cap S\neq\phi$ となるから $x\in Cl(S)$．つぎに，$Cl(S\cup T)=Cl(S)\cup Cl(T)$ も成り立つことを示そう．S または T が ϕ となるときには，上の関係が成り立つことは明らかだから S, T はともに ϕ とは異なるとする．$Cl(S)\cup Cl(T)\subset Cl(S\cup T)$ は容易に確かめられ

る．ここで，$x \in Cl(S \cup T) - Cl(S)$ とすると $x \in Cl(T)$ となることを示せばよい．$x \notin Cl(S)$ とするのだから $\tilde{N}$ の元 N_0 を適当に選べば $N_0x \cap S = \phi$ となる．ところが $x \in Cl(S \cup T)$ だから $N_0x \cap T \neq \phi$．さて N を $\tilde{N}$ の任意の元としよう．すると $N_0 \cap N$ は再び G の指数有限正規部分群となる(図参照)．$(N_0 \cap N)x \subset N_0x$



だから $(N_0 \cap N)x \cap S = \phi$，ゆえに $(N_0 \cap N)x \cap T \neq \phi$．したがって $Nx \cap T \neq \phi$．すなわち $x \in Cl(T)$ がいえた！ こうして (G, Cl) は位相空間となることが示された．(G, Cl) を群 G の **Krull 空間** (Krull space) と呼び，上の $Cl(S)$ を S の **Krull 閉包** (Krull closure) と呼ぶ．Krull 閉包の概念は，無限次 Galois 拡大の理論において用いられる．

問題 2.2　(i)　有限群の Krull 空間は離散位相空間となることを示せ．

(ii)　有理数体の加法群 $\boldsymbol{Q}^+$ の Krull 空間は密着空間となることを示せ．［ヒント］ $\boldsymbol{Q}^+$ の任意の元 a，$\boldsymbol{N}$ の任意の元 n に対して，$\boldsymbol{Q}^+$ の元 b で $a = nb$ となるものがとれることを用いるとよい．

問題 2.3　整数の加法群 $\boldsymbol{Z}^+$ の Krull 空間 $(\boldsymbol{Z}^+, Cl)$ においてつぎの (i), (ii) が成り立つことを示せ．

(i)　$Cl(\{a\}) = \{a\}$　$(a \in \boldsymbol{Z}^+)$．［ヒント］ まず $a=0$ の場合を考える．また $\boldsymbol{Z}^+$ の指数有限部分群はすべて $n\boldsymbol{Z}^+ = \{x \in \boldsymbol{Z}^+ \mid \exists y (y \in \boldsymbol{Z}^+ \wedge x = ny)\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ と表わされることを示し，このことを用いよ．

(ii)　$Cl(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{Z}^+$．――

Krull 空間 $(\boldsymbol{Z}^+, Cl)$ において $\boldsymbol{Z}^+$ の有限部分集合 S をとると $Cl(S) = S$ となるが，S が $\boldsymbol{Z}^+$ の無限部分集合である場合には $Cl(S) = \boldsymbol{Z}^+$ となること(たとえば

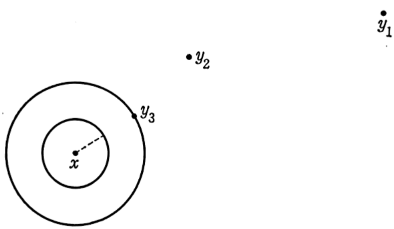
$S=\boldsymbol{N}$) も，そうではないこともある(たとえば $S=n\boldsymbol{Z}$ ($n\in\boldsymbol{N}$) とすると $Cl(S)=S$)．より一般に X を集合とし，その部分集合 S に対して S が有限集合ならば $Cl(S)=S$, S が無限集合ならば $Cl(S)=X$ とおいて，$\mathcal{P}(X)$ から $\mathcal{P}(X)$ への写像 Cl を定めると，容易に確かめられるように (X, Cl) は位相空間となる．この (X, Cl) を X を台とする**有限的** (finitary) 位相空間と呼ぶ．

問題 2.4　集合 X を台とする有限的位相空間が離散的であるための必要十分条件は X が有限集合であることを示せ．——

無限集合 X を台とする有限的位相空間 (X, Cl) は計量化可能だろうか．問題 2.4 にも述べられたように，このとき (X, Cl) は離散的ではない．いま (X, Cl) が計量化可能であると仮定し，Cl が計量 d によって定まるものとしてみよう．すると距離空間 (X, d) は離散距離空間とはならない．したがって X の点 x を適当に選べば，任意の正の実数 ε に対して x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ に含まれる x 以外の点 x_ε が存在する．また y を X の x 以外の任意の元とすると，

$$(*)\qquad \exists z\,(z\in X\wedge 0<d(z,x)<d(y,x)/2)$$

という命題が成り立つ．さて，特に ε として 1 をとり $x_\varepsilon(=x_1)=y_1$ とおき，上



の $(*)$ によって存在を保証される X の元 z で "$0<d(z,x)<d(y_1,x)/2$" を満たすものを y_2 とおこう．以下順次に y_n に対して y_{n+1} をとって "$0<d(y_{n+1},x)<d(y_n,x)/2$" を満たすようにしよう(厳密には帰納定理を用いる)．S を $y_2, \cdots, y_n, \cdots$ の全体から成る X の無限部分集合とすると，明らかに $Cl_d(S)=Cl(S)=\{x\}\cup S$ となる．$y_1\notin S$ だから $Cl_d(S)\not\ni y_1$ であるが，(X, Cl) は有限的位相空間であるという仮定から $Cl(S)=X$ とならなければならず矛盾が導かれた．したがって，無限集合を台とする有限的位相空間は計量化可能ではない！

閉包の概念に基づいて位相空間の定義がなされ，距離空間以外にも位相空間があることが示された．位相空間同士の間の関係について調べるためには‘連続写像’が用いられる．距離空間から距離空間への連続写像の性質を，閉包の言葉によって明らかにした定理 1.10 を参考にして，つぎのような定義を与えよう．

(X, Cl_X), (Y, Cl_Y) を位相空間，f を X から Y への写像とする．x を X の元としよう．このとき，写像 f が x **において連続** (continuous at x) であるとは，

$$\forall S(S \subset X \wedge x \in Cl_X(S) \Longrightarrow f(x) \in Cl_Y(f(S)))$$

が成り立つことを意味し，

$$\forall S(S \subset X \Longrightarrow f(Cl_X(S)) \subset Cl_Y(f(S)))$$

が成り立つときに，f は (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) への**連続写像** (continuous mapping) であるという．

f が (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) への連続写像であれば，f は X の任意の元 x において連続であり，その逆も成り立つ．この定義から直ちにわかるように，連続写像を‘つないだもの’はまた連続になる．より正確にいおう．(X, Cl_X), (Y, Cl_Y), (Z, Cl_Z) を位相空間とし，写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ が与えられているとする．ここで f が X の元 x において連続であり，しかも g が $f(x)$ において連続ならば $g \circ f$ は x において連続である．また f, g がともに連続写像ならば $g \circ f$ も連続写像となる．(これらについては読者自ら確かめられたい.)

定義から直ちにわかるように，(X, Cl_X) を X を台とする離散空間，(Y, Cl_Y) を任意の位相空間とすると X から Y への任意の写像 f は連続写像である．一方，(X, Cl_X) を任意の位相空間，(Y, Cl_Y) を Y を台とする密着空間とすると，X から Y への任意の写像は連続写像となる．特に $X \neq \phi$ のとき，(X, Cl_1), (X, Cl_2) をそれぞれ X を台とする離散空間，密着空間とすると，X の恒等写像 1_X は (X, Cl_1) から (X, Cl_2) への連続写像となるが，X が 2 個以上の元を含めば (X, Cl_2) から (X, Cl_1) への連続写像ではない．

一般に位相空間 (X, Cl_X) と (Y, Cl_Y) および X から Y への全単射 f が与えられたとき，f が (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) への連続写像であり，しかも f^{-1} が (Y, Cl_Y) から (X, Cl_X) への連続写像であるならば f を (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) の上への**位相写像** (topological mapping) または**同位相写像** (homeomorphism) と呼び，このとき (X, Cl_X), (Y, Cl_Y) は**同位相** (homeomorphic) であるといって (X, Cl_X)

$\approx (Y, Cl_Y)$ または $X \approx Y$ と表わす．明らかに

$$(X, Cl_X) \approx (X, Cl_X)$$

$$(X, Cl_X) \approx (Y, Cl_Y) \Longrightarrow (Y, Cl_Y) \approx (X, Cl_X)$$

$$(X, Cl_X) \approx (Y, Cl_Y) \wedge (Y, Cl_Y) \approx (Z, Cl_Z) \Longrightarrow (X, Cl_X) \approx (Z, Cl_Z)$$

が成り立つ．

例 2.4 G, H を群，(G, Cl_G), (H, Cl_H) をそれらの Krull 空間としよう．f を G から H への準同型写像とする．いま N を H の指数有限正規部分群とすると $f^{-1}(N)$ は G の正規部分群となり，f からひき起される準同型写像 $\tilde{f}: G/f^{-1}(N) \to H/N$ は単射となるので $f^{-1}(N)$ も G の指数有限部分群となる．このことから容易に確かめられるように f は (G, Cl_G) から (H, Cl_H) への連続写像となる．

問題 2.5 G を群，(G, Cl) を G の Krull 空間，$g \in G$ とし，G からそれ自身への写像 L_g, R_g を $L_g(x) = gx$, $R_g(x) = xg$ によって定めると，L_g, R_g はともに (G, Cl) からそれ自身の上への位相写像となることを示せ．——

閉包の概念を用いて直接に定義される概念として，上に述べたものに加えて‘稠密性’の概念がある．すなわち，(X, Cl) を位相空間，S, T を X の部分集合とするとき，$T \subset Cl(S)$ が成り立つならば S は T において**稠密** (dense) であるというのである (問題 1.23 参照)．特に $X = Cl(S)$ が成り立つとき S は X の**到る所で稠密** (everywhere dense)，または S は X の**稠密な部分集合** (dense subset) であるという．

(X, Cl) を集合 X の離散空間，$S, T \subset X$ とすれば，S が T において稠密であるための必要十分条件は $T \subset S$ が成り立つことである．一方 (X, Cl) を X の密着空間とすれば，X の任意の空ではない部分集合は X の到る所で稠密である．

$\boldsymbol{Q}^n$ を n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点 $(x_1, \cdots, x_n)$ で成分 x_i がすべて有理数であるもの全体から成る $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とすると，$\boldsymbol{Q}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の稠密な部分集合である．一般に位相空間 (X, Cl) が与えられたとき X の可算部分集合 S で X の到る所で稠密なものがあれば (X, Cl) は**可分** (separable) であるという．

問題 2.6 $(\boldsymbol{Z}, Cl)$ を $\boldsymbol{Z}$ の加法群の Krull 空間とする．$\boldsymbol{Z}$ の無限部分集合で $\boldsymbol{Z}$ の到る所で稠密ではないものの例をあげよ．——

第1章§1.10では，距離空間 (X, d) において，近傍の概念を用いて X の粗な部分集合という概念を定義しそれを用いて深い結果である Baire の定理を導い

た．われわれは，しかし，距離空間の点の近傍に当る概念を一般の位相空間に関してはまだ定義していない．上に述べたことからも見られるように，位相空間としては非常に多くの，趣きの異なるものがあるが，それらについても‘近傍’の概念を定義することができる．そのために，つぎの節でまず位相空間における‘閉集合，開集合’の概念を導入しよう．

§2.2 閉集合，開集合

(X, Cl) を位相空間，$S\subset X$ とする．ここで $\bar{S}=Cl(S)=S$ が成り立つときに S を X の (閉包写像 Cl に関する) **閉じた** (closed) 部分集合あるいは**閉(部分)集合** (closed set) と呼ぶ．(Cl 4) より X の任意の部分集合 S の閉包 $Cl(S)$ は X の閉部分集合となる．一方，S の X に関する補集合 $S^c=X-S$ が X の中で閉じているとき (すなわち S^c が X の閉部分集合であるとき) S を X の (Cl に関する) **開いた** (open) 部分集合または**開(部分)集合** (open set) と呼ぶ．

例として1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ をとろう．$\boldsymbol{R}$ 自身または ϕ は明らかに $\boldsymbol{R}$ の閉集合であり，したがって $\phi=\boldsymbol{R}^c$，$\boldsymbol{R}=\phi^c$ はまた $\boldsymbol{R}$ の開集合でもある．$\boldsymbol{R}$ の1点 $\{a\}$ は閉じているが，$\{a\}^c=\boldsymbol{R}-\{a\}$ の閉包は $\boldsymbol{R}$ 自身だから $\{a\}^c$ は開いてはいるが閉じてはいない．ゆえに $\{a\}$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合ではあるが開集合ではない．$\boldsymbol{R}$ の有限個の点から成る集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ も同様に $\boldsymbol{R}$ の閉集合であり，$\boldsymbol{R}$ の中で開いてはいない．$\boldsymbol{R}$ の無限個の点から成る集合 S についてはどうだろうか．たとえば $S=[0,1]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0\leqq x\leqq 1\}$ とすると $\bar{S}=S$ だが $\bar{S^c}=S^c\cup\{0,1\}\supsetneqq S^c$ となり，S は閉じているが開いてはいない．また $(0,1)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0<x<1\}$ は開いているが閉じてはいず，さらに $(0,1]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0<x\leqq 1\}$ は開いても閉じてもいない．このように，位相空間 (X, Cl) が与えられたとき X の閉 (または開) 集合としていろいろなものがとれるが，X の任意の部分集合 S をとると S は閉じても開いてもいない場合もある．

一般に (X, Cl) を位相空間とするとき，$\mathscr{C}(X, Cl)$ を X の閉集合全体から成る集合，$\mathscr{O}(X, Cl)$ を X の開集合全体から成る集合としよう．定義から，X の任意の部分集合 S に対して

$$(2.1)\qquad S\in\mathscr{C}(X, Cl) \iff S^c\in\mathscr{O}(X, Cl)$$

が成り立つ．さらにつぎのことが成り立つ．

(C 1)　$X, \phi \in \mathcal{C}(X, Cl)$

(C 2)　$S, T \in \mathcal{C}(X, Cl) \Longrightarrow S \cup T \in \mathcal{C}(X, Cl)$

(C 3)　$\mathcal{T} \subset \mathcal{C}(X, Cl)$, $\mathcal{T} \neq \phi \Longrightarrow \bigcap \mathcal{T} \in \mathcal{C}(X, Cl)$.

実際 (C 1), (C 2) は (Cl 1), (Cl 2), (Cl 3) から直ちに導かれる．(C 3) を示すために $T \in \mathcal{T}$ としよう．すると $\bigcap \mathcal{T} \subset T$, ゆえに $Cl(\bigcap \mathcal{T}) \subset Cl(T) = T$ が成り立つ．T は $\mathcal{T}$ の任意の元としてよいから $Cl(\bigcap \mathcal{T}) \subset \bigcap \mathcal{T}$ が成り立つが，(Cl 3) を再び用いればこれから $Cl(\bigcap \mathcal{T}) = \bigcap \mathcal{T}$, すなわち $\bigcap \mathcal{T} \in \mathcal{C}(X, Cl)$ の成り立つことがいえる．

上の (2.1) より直ちに，

(O 1)　$X, \phi \in \mathcal{O}(X, Cl)$

(O 2)　$S, T \in \mathcal{O}(X, Cl) \Longrightarrow S \cap T \in \mathcal{O}(X, Cl)$

(O 3)　$\mathcal{T} \subset \mathcal{O}(X, Cl) \Longrightarrow \bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{O}(X, Cl)$

が成り立つことがわかる．また "(C 1)∧(C 2)∧(C 3)" ⟺ "(O 1)∧(O 2)∧(O 3)" が成り立つ．上の (C 1), (C 2), (C 3) を '閉集合の公理', (O 1), (O 2), (O 3) を '開集合の公理' という．$\mathcal{C}(X, Cl) \cap \mathcal{O}(X, Cl)$ に属する X の部分集合 (たとえば X, ϕ) を X の**閉かつ開** (clopen) (部分) 集合と呼ぶ．

例 2.5　(X, Cl_1) を離散空間とすると X の任意の部分集合は X の閉かつ開部分集合である．一方 (X, Cl_2) を密着空間とすると $\mathcal{C}(X, Cl_2) = \mathcal{O}(X, Cl_2) = \{X, \phi\}$ となる．

問題 2.7　X を無限集合，(X, Cl) を X を台とする有限的位相空間とする．$S, T \in \mathcal{O}(X, Cl)$ で，S, T はともに空集合とは異なるものとすれば $S \cap T \neq \phi$ となることを示せ．——

(X, d) を距離空間，Cl を計量 d によって定まる閉包写像としよう．Cl に関する X の閉 (または開) 集合を X の (d に関する) 閉 (または開) 部分集合とも呼ぶことにする．§1.10 で述べたことから容易につぎの定理が得られる (証明は読者自ら試みられたい)．

定理 2.1　(X, d) を距離空間，S を空集合とは異なる X の部分集合とする．S が X の開集合となるための必要十分条件は，S の任意の元 x に対して適当な正の実数 ε をとれば $U_\varepsilon(x) \subset S$ となることである．

問題 2.8　$\boldsymbol{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間，$\mathcal{T}_0$ を $\boldsymbol{Q}^n$ に属する点 x の m^{-1} 近傍 (m

$\in \boldsymbol{N}$) 全体から成る集合とすると，$\boldsymbol{R}^n$ の任意の開集合は $\mathcal{T}_0$ の適当な部分集合の和集合として表わされることを示せ．［ヒント］S を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合，$s \in S$ とし $U_\varepsilon(s) \subset S$ とすると，$U_{\varepsilon/2}(s) \cap \boldsymbol{Q}^n \neq \phi$，したがって $U_{\varepsilon/2}(s)$ には $\boldsymbol{Q}^n$ の元 x が含まれることを示し，さらに $s \in U_{\varepsilon/2}(x) \subset S$ となることを用いるとよい．——

さてこの節の初めで注意したように (X, Cl) を位相空間，$S, T \subset X$，しかも $S \subset T$ ならば $\bar{S} \subset \bar{T}$ となる．ここで T が閉じているならば $\bar{S} \subset T$．一方，$\bar{\bar{S}} = \bar{S}$ だから $\bar{S}$ は閉じている．こうして $\bar{S}$ は S を部分集合として含む閉集合の中で‘一番小さい’ものとみなされる．この事実を用いるとつぎの定理が証明される．

定理 2.2　(X, Cl_X), (Y, Cl_Y) を位相空間，f を X から Y への写像とするとつぎの (i), (ii), (iii) は互いに同値である．

(i)　f は (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) への連続写像である

(ii)　$\forall S(S \in \mathcal{C}(Y, Cl_Y) \Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{C}(X, Cl_X))$

(iii)　$\forall S(S \in \mathcal{O}(Y, Cl_Y) \Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{O}(X, Cl_X))$.

証明　$S \subset Y$ のとき $f^{-1}(Y-S) = X - f^{-1}(S)$ となるから (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) が成り立つことは容易にわかる．(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) が成り立つことを示そう．

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : $S \in \mathcal{C}(Y, Cl_Y)$ とする．f を連続と仮定して $Cl_X(f^{-1}(S)) = f^{-1}(S)$ を示せばよい．そのためには $Cl_X(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(S)$ を示せば十分である．f は連続だから

$$f(Cl_X(f^{-1}(S))) \subset Cl_Y(f(f^{-1}(S))) \subset Cl_Y(S) = S,$$

ゆえに $Cl_X(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(S)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : $T \subset X$ とし，$f(Cl_X(T)) \subset Cl_Y(f(T))$ を示せばよい．$Cl_Y(f(T))$ は閉じているから $f^{-1}(Cl_Y(f(T)))$ は X の閉集合であるが，$f^{-1}(Cl_Y(f(T))) \supset f^{-1}(f(T)) \supset T$ となるから，上に注意したように，$Cl_X(T) \subset f^{-1}(Cl_Y(f(T)))$．ゆえに，$f(Cl_X(T)) \subset Cl_Y(f(T))$ が成り立つ．▌

系　上の定理で f が位相写像であれば，X の任意の部分集合 S に対して

(i)　$S \in \mathcal{C}(X, Cl_X) \Longleftrightarrow f(S) \in \mathcal{C}(Y, Cl_Y)$

(ii)　$S \in \mathcal{O}(X, Cl_X) \Longleftrightarrow f(S) \in \mathcal{O}(Y, Cl_Y)$

が成り立つ．

例 2.6　$\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間の構造を持つ．$a_1, \cdots, a_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の元で 1 次独立なものとする．このとき $\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 x は，$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ ($\lambda_i \in \boldsymbol{R}$)

のように一意的に表わされるから，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 f を，$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ とおいて定めれば，f は明らかに n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ から 1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ への連続写像となる．また，

$$\varDelta(a_1,\cdots,a_n)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\in\boldsymbol{R}^n\;\middle|\;0\leqq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\leqq 1,\quad 0\leqq\lambda_i\,(i=1,\cdots,n)\right\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合となる．$\varDelta(a_1,\cdots,a_n)$ は原点 $O=(0,\cdots,0)$ および $a_1,\cdots,a_n$ を頂点とする**多面体** (polyhedron) と呼ばれる．

例 2.7　例 1.3 で述べた $S_2(a,b)$ の各元 f に $\left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}$ を対応させる $S_2(a,b)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像は連続であった (問題 1.11 参照)．ゆえに，

$$S=\left\{f\in S_2(a,b)\;\middle|\;\left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}<1\right\}$$

は開集合である．また，

$$\bar{S}=\left\{f\in S_2(a,b)\;\middle|\;\left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}\leqq 1\right\}$$

である．

例 2.8　$\boldsymbol{Q}_p$ の各元 $\tilde{a}$ に $\tilde{v}_p(\tilde{a})=\tilde{d}_p(\tilde{a},0)$ を対応させる $\boldsymbol{Q}_p$ から $\boldsymbol{R}$ への写像は連続である (問題 1.10 参照)．ゆえに

$$\boldsymbol{Z}_p=\{\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p\mid\tilde{v}_p(\tilde{a})\leqq 1\}$$

とおくと $\boldsymbol{Z}_p$ は $\boldsymbol{Q}_p$ の閉集合である．ところが容易にわかるように $\boldsymbol{Z}_p=\{\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p\mid\tilde{v}_p(\tilde{a})<p^{-1/2}\}$ であるから $\boldsymbol{Z}_p$ は $\boldsymbol{Q}_p$ の開集合ともなる．さらに $\boldsymbol{Z}_p\ni\tilde{a},\tilde{b}$ とすると $\tilde{v}_p(\tilde{a}\pm\tilde{b})\leqq\max\{\tilde{v}_p(\tilde{a}),\tilde{v}_p(\tilde{b})\}$，$\tilde{v}_p(\tilde{a}\tilde{b})=\tilde{v}_p(\tilde{a})\tilde{v}_p(\tilde{b})$ だから $\tilde{a}\pm\tilde{b}$，$\tilde{a}\tilde{b}$ はともに $\boldsymbol{Z}_p$ の元となる．こうして $\boldsymbol{Z}_p$ が $\boldsymbol{Q}_p$ の閉かつ開集合であり，さらに $\boldsymbol{Q}_p$ の部分環となることがわかった．$\boldsymbol{Z}_p$ を $\boldsymbol{Q}_p$ の $\boldsymbol{p}$ **進整数環** (ring of p-adic integers) と呼び，$\boldsymbol{Z}_p$ の元を $\boldsymbol{p}$ **進整数** (p-adic integer) と呼ぶ．$0,p,p^2,\cdots$ はみな p 進整数であるが，$p^{-1},p^{-2},\cdots$ はそうではない．より正確には，

$$\boldsymbol{Z}_p=\left\{\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p\;\middle|\;\tilde{a}=\sum_{i=0}^{\infty}a_ip^i,\ a_i\in\bar{\boldsymbol{N}},\ 0\leqq a_i\leqq p-1\right\}$$

となる．

問題 2.9　r を 0 とは異なる任意の実数とするとき $S_r=\{\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p\mid\tilde{v}_p(\tilde{a})\leqq r\}$ は閉かつ開集合であること，$r\geqq 0$ ならば $S_r\neq\phi$ であることを示せ．

例 2.9　G を群，(G,Cl) を G の Krull 空間とし N を G の指数有限正規部分

群とすると，定義より明らかに $\bar{N}\subset N$ となるから $N=\bar{N}$，すなわち N は G の閉集合である．また $g\in G$ とすると L_g は G からそれ自身の上への位相写像であるから (問題 2.5)，gN も G の閉集合である．ところで $G=\bigcup_{i=1}^{n} g_iN$ $(n\in N)$，$g_1=e$ (単位元) とすると ($n\geqq 2$ ならば) $g_2N\cup\cdots\cup g_nN$ は閉集合，したがって $N=g_1N$ は G の開集合となる．ゆえに ($n=1$ すなわち $G=N$ の場合にも) N は G の閉かつ開集合となる．——

上に見たように位相空間 (X, Cl) の台 X の閉集合，開集合は (X, Cl) の構造をよく反映し，しかも (C 1)-(C 3), (O 1)-(O 3) という簡明な性質を持っている．一方 $S\subset X$ に対して $Cl(S)$ は S を部分集合として含む X の閉集合の中で‘最小’のものである．すなわち，$\mathcal{C}(S)=\{T\in\mathcal{C}(X, Cl)\mid T\supset S\}$ とおくと ($X\in\mathcal{C}(S)$ だから $\mathcal{C}(S)\neq\phi$) $Cl(S)=\bigcap\mathcal{C}(S)$ となる．ここで，一般に $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{C}(X, Cl)$ に対して命題 (C 1)-(C 3) が成り立つことを仮定し，$S\subset X$ に対して上のように $\mathcal{C}(S)=\{T\in\mathcal{C}(X, Cl)\mid T\supset S\}$，$\bar{S}=Cl(S)=\bigcap\mathcal{C}(S)$ とおいたとき，(Cl 1)-(Cl 4) が導かれるだろうか．(Cl 1) “$\bar{\phi}=\phi$” は明らかに成り立つ．また (Cl 3) “$S\subset\bar{S}$” が成り立つことも明らかである．(Cl 2) “$\overline{S\cup T}=\bar{S}\cup\bar{T}$” が成り立つことはつぎのように示される．まず，$\bar{S}\supset S$，$\bar{T}\supset T$，さらに $\bar{S}$, $\bar{T}$ がともに $\mathcal{C}(X, Cl)$ の元となることに注意しよう ((C 3) による!)．ゆえに (C 2) により $\bar{S}\cup\bar{T}$ は $S\cup T$ を部分集合として含む $\mathcal{C}(X, Cl)$ の元となるから定義により $\bar{S}\cup\bar{T}\supset\overline{S\cup T}$．一方，$\overline{S\cup T}$ は S, T をそれぞれ部分集合として含む $\mathcal{C}(X, Cl)$ の元だから $\bar{S}\subset\overline{S\cup T}$，$\bar{T}\subset\overline{S\cup T}$，ゆえに $\bar{S}\cup\bar{T}\subset\overline{S\cup T}$，したがって $\bar{S}\cup\bar{T}=\overline{S\cup T}$ が成り立つ！ また $\bar{\bar{S}}$ は $\bar{S}$ を部分集合として含む‘最小’の $\mathcal{C}(X, Cl)$ の元であるが，$\bar{S}$ 自身が $\mathcal{C}(X, Cl)$ の元なので $\bar{\bar{S}}=\bar{S}$，すなわち (Cl 4) が成り立つ！ こうして，

$$(\mathrm{Cl}\ 1)\wedge(\mathrm{Cl}\ 2)\wedge(\mathrm{Cl}\ 3)\wedge(\mathrm{Cl}\ 4)\iff(\mathrm{C}\ 1)\wedge(\mathrm{C}\ 2)\wedge(\mathrm{C}\ 3)$$

が成り立つことが示された．したがって集合 X と $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ で (C 1)-(C 3) を満たすものが与えられれば自然に位相空間 (X, Cl) を決定して，$\mathcal{C}$ が X の閉集合全体の集合 $\mathcal{C}(X, Cl)$ と一致するようにできる．また (C 1)-(C 3) $\iff$ (O 1)-(O 3) だったから $\mathcal{C}$ のかわりに $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ で (O 1)-(O 3) を満たすものをとっても自然に (X, Cl) が得られ，そのとき $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X, Cl)$ となる．位相空間を $\mathcal{O}$ によって定めるのは Bourbaki の採用した方法である．(O 1)-(O 3) を満たす $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ は X の**位相** (topology) と呼ばれ，(X, Cl) のかわ

りに $(X, \mathcal{O})$ あるいは単に X を (位相 $\mathcal{O}$ を持つ) 位相空間と呼ぶのである. このとき Cl は位相 $\mathcal{O}$ に**同伴する** (associated) 閉包写像と呼ばれ, (X, Cl) が与えられたとき $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X, Cl)$ を 'Cl によって定まる X の位相' と呼ぶ. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が与えられ, Cl_X, Cl_Y をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ に同伴する閉包写像としよう. このとき写像 $f: X \to Y$ が '$(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$ に関して連続である' とは f が (X, Cl_X) から (Y, Cl_Y) への連続写像となることを意味するものとする.

(X, Cl) が離散空間, 密着空間, 有限的位相空間等々であるのに応じて, $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X, Cl)$ を X の**離散位相**, **密着位相**, **有限的位相**等々と呼ぶ.

$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を X の位相とするとき $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$ $(\mathcal{O} \supsetneqq \mathcal{O}')$ が成り立つならば $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}'$ よりも (真に) **強い**位相であるといい, また $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ よりも (真に) **弱い**位相であるという. $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$ が成り立つためには, X の恒等写像 1_X が $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ に関して連続となることが必要十分である. X の離散位相は $\mathcal{P}(X)$ に他ならず X のどの位相よりも強い. また X の密着位相は $\{X, \phi\}$ であり, X のどの位相よりも弱い.

例 2.10 K を可換体, R を K 上の n 変数多項式環 $K[X_1, \cdots, X_n]$ $(n \in N)$ とする. $I(R)$ を R のイデアル全体から成る集合とし, K^n を直積集合 $\underbrace{K \times \cdots \times K}_{n}$ とする. ここで, R の元 $f=f(X_1, \cdots, X_n)$ が与えられたとき K^n の元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ を K の元 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対応させる写像を考え, この写像をやはり f と書こう. $I(R)$ の元 A が与えられたとき 'A の零点集合' $\mathfrak{N}(A)$ を

$$\mathfrak{N}(A) = \{x \in K^n \mid \forall f (f \in A \Longrightarrow f(x)=0)\}$$

とおいて定める. さらに,

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{P}(K^n) \mid \exists A (A \in I(R) \wedge S=\mathfrak{N}(A))\}$$

とおこう. すると $\mathcal{C}$ は閉集合の公理 (C1)-(C3) を満たす. 実際 $K^n=\mathfrak{N}(\{0\})$, $\phi=\mathfrak{N}(R)$ だから (C1) は満たされ, $S=\mathfrak{N}(A)$, $T=\mathfrak{N}(B)$ $(A, B \in I(R))$ ならば $S \cup T=\mathfrak{N}(A \cap B)$ だから (C2) も成り立つ. さて $\mathfrak{A} \subset I(R)$, $\mathfrak{A} \neq \phi$, さらに $\mathfrak{A}$ が有限集合 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ であるとき

$$\sum \mathfrak{A} = \{f \in R \mid \exists g_i (g_i \in A_i \ (i=1, \cdots, n) \wedge f=g_1+\cdots+g_n)\}$$

とおけば $\sum \mathfrak{A}$ は明らかに R のイデアルで, しかも $\mathfrak{A}$ の各元 A_i を部分集合として含み, さらにそのようなイデアルの中で '最小' のものである. 一般に $\mathfrak{A} \subset I(R)$, $\mathfrak{A} \neq \phi$ のときにも

$$\sum \mathfrak{A} = \{f \in R \mid \exists B(B \subset \mathfrak{A} \wedge B \neq \phi \wedge |B| < \infty \wedge f \in \sum B)\}$$

とおけば $\sum \mathfrak{A} \in I(R)$，さらに $\mathfrak{A}$ の任意の元は $\sum \mathfrak{A}$ に含まれる．ここで，$\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$，$\mathcal{T} \neq \phi$ に対し，

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{T}) = \{A \in I(R) \mid \exists S(S \in \mathcal{T} \wedge S = \mathfrak{N}(A))\}$$

とおけば $\mathfrak{A} \subset I(R)$，$\mathfrak{A} \neq \phi$ で，しかも $\bigcap \mathcal{T} = \mathfrak{N}(\sum \mathfrak{A})$ となることが容易に確かめられる．こうして $\mathcal{C}$ は (C 1)-(C 3) をすべて満たすから K^n の閉包写像 Cl を $\mathcal{C}(K^n, Cl) = \mathcal{C}$ となるようにとることができる．このとき位相空間 (K^n, Cl) を **Affine Zariski 空間**または n 次元 **Affine** K **空間**と呼び，$\mathcal{O} = \mathcal{O}(K^n, Cl)$ を K^n の **Zariski 位相**と呼ぶ．

問題 2.10 $\boldsymbol{C}$ の Zariski 位相は $\boldsymbol{C}$ の有限的位相となることを示せ．［ヒント］$\boldsymbol{C}[X]$ の任意のイデアル A は単項イデアルであり，f をその生成元とすると $f \in \boldsymbol{C}$ または

$$f = f(X) = a_0(X-a_1)^{e_1} \cdots (X-a_n)^{e_n} \qquad (a_i \in \boldsymbol{C},\ e_i \in \boldsymbol{N})$$

のように 1 次因子の積に分解されることに注意し，特に A の生成元 f として $(X-a)^e$ $(a \in \boldsymbol{C},\ e \in \boldsymbol{N})$ をとると $\mathfrak{N}(A) = \{a\}$ となることを示せ．

問題 2.11 K を可換体とする．K^n の Zariski 空間 $(K^n, \mathcal{O})$ において，$U, V \in \mathcal{O}$, $U \neq \phi$, $V \neq \phi$ ならば $U \cap V \neq \phi$ となることを示せ．——(K は無限体とする.)

定理 2.1 から見られるように，(X, d) を距離空間とすると X の開集合は必ず $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0,\ x \in X)$ という特別な形の開集合の和集合として表わされる．したがって X の位相は $U_\varepsilon(x)$ というタイプの開集合全体を与えることによって確定する．一般に $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき，$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{O}_0$ が与えられ $\mathcal{O}$ の任意の元が $\mathcal{O}_0$ の部分集合の和集合として表わされるならば，すなわち

$$\forall U[U \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists S(S \subset \mathcal{O}_0 \wedge U = \bigcup S)]$$

が成り立つならば，$\mathcal{O}_0$ を $\mathcal{O}$ の**基** (base) または**開基** (open base) であるという．$\mathcal{O}$ 自身は当然 $\mathcal{O}$ の基である．

また n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開基として

$$\mathcal{O}_0 = \{U \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n) \mid \exists m \exists x(m \in \boldsymbol{N} \wedge x \in \boldsymbol{Q}^n \wedge U = U_{m^{-1}}(x))\}$$

をとることができる (問題 2.8 参照)．一般に $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{O}_0$ をその開基とすると**開基の公理**

(OB 1) $\forall x[x \in X \Longrightarrow \exists U(U \in \mathcal{O}_0 \wedge x \in U)]$

(OB 2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_0$, $x \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow \exists U_3 (U_3 \in \mathcal{O}_0 \wedge x \in U_3 \wedge U_3 \subset U_1 \cap U_2)$

が成り立つ．(OB 1) は $X \in \mathcal{O}$（すなわち X が X の開集合であること）から導かれ，(OB 2) は $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ となることから導かれる．

さて一般に集合 X と $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}_0$ が与えられ，上の (OB 1), (OB 2) が満たされているとしよう．ここで

$$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists S (S \subset \mathcal{O}_0 \wedge U = \bigcup S)\}$$

とおくと $\mathcal{O}$ は開集合の公理 (O 1)-(O 3) を満たすことが示される．実際 (OB 1) より X の任意の元 x に対して $\mathcal{O}_0$ の元 U_x を選んで $x \in U_x$ を成り立たせることができる（選出公理を用いる）．ここで $S = \{U \in \mathcal{O}_0 \mid \exists x (x \in X \wedge U = U_x)\}$ とおけば明らかに $\bigcup S = X$，ゆえに $X \in \mathcal{O}$．また $\phi \subset \mathcal{O}_0$ だから $\bigcup \phi = \phi \in \mathcal{O}$ となり (O 1) が成り立つ．(O 2) および (O 3) が成り立つことも容易に確かめられる．こうして，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が得られ $\mathcal{O}_0$ は $\mathcal{O}$ の開基となる！ したがって位相空間の公理としては上の (OB 1), (OB 2) をとってもよいのである．

上にも注意したように，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が与えられたときその開基の選び方は必ずしも一意的ではない．$(X, \mathcal{O})$ の開基 $\mathcal{O}_0$ として可算集合が選べるとき $(X, \mathcal{O})$ は**第2可算公理** (second countability axiom) を満たすという．n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は第2可算公理を満たす．

問題 2.12 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第2可算公理を満たせば $(X, \mathcal{O})$ は可分であることを示せ．

問題 2.13 $(X, \mathcal{O})$ を計量化可能な位相空間とすると，$(X, \mathcal{O})$ が可分であることと $(X, \mathcal{O})$ が第2可算公理を満たすこととは同値であることを示せ．——

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が与えられたとき，その開基とともに用いられる概念として $(X, \mathcal{O})$ または $\mathcal{O}$ の**部分基** (sub-base) というものがある．$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}$ の部分基であるとは，

(∗) $\mathcal{O}_0 = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists S (S \subset \mathcal{O}_1 \wedge |S| < \infty \wedge S \neq \phi \wedge U = \bigcap S)\}$

とおいて定められる $\mathcal{O}_0$ が $(X, \mathcal{O})$ の開基になるときにいう．したがって，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}$ の部分基のとき $\mathcal{O}$ の任意の元は $\mathcal{O}_1$ に属する有限個（1個以上）の集合の共通部分から成る集合の和集合として表わされる．このとき $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_1$ によって**生成される** (generated) という．$\mathcal{O}_1$ は

(SB) $\forall x [x \in X \Longrightarrow \exists U (U \in \mathcal{O}_1 \wedge x \in U)]$

を満たす．また $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}_1$ が (SB) を満たすとき，$\mathcal{O}_0$ を上と同様に (*) によって定めれば，$\mathcal{O}_0$ は明らかに (OB 1), (OB 2) を満たすから X の開基となる．(SB) を X の‘開集合系の部分基の公理’と呼ぶ．

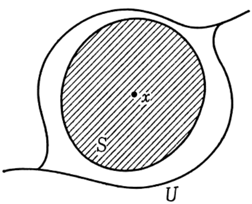
§2.3 近　傍

$\boldsymbol{R}$ の区間 $[-1, 1]$, $(-1, 1)$, $[-1, 1)$ を考えよう．これらはいずれも 0 を元として含み，さらに‘0 と近い’点の集まりをも含んでいる．すなわち ε を十分小さい正の実数とすれば 0 の ε 近傍 $U_\varepsilon(0)$ はこれらの区間に含まれるのである．0 を含むこれらの区間と類似なものを一般の位相空間においても考えられるだろうか．ここで上の三つの区間がみな 0 を元として含む開集合 $(-1, 1)$ を含むということに注目し，つぎのような定義を与えよう．

集合 X とその位相 $\mathcal{O}$ (すなわち X の開集合全体の集合) が与えられているとし，$x \in X$ とする．ここで X の部分集合 U について，

$$\exists S(S \in \mathcal{O} \wedge x \in S \wedge S \subset U)$$

が満たされているとき U を x の ($\mathcal{O}$ に関する) **近傍** (neighborhood) と呼ぶ．す



なわち X の開集合 S で，x を含み，しかも U の部分集合となるようなものがあるとき U を x の近傍と呼ぶのである．x を含む X の開集合は x の近傍となり，x の**開近傍** (open neighborhood) と呼ばれる．x の近傍全体から成る集合を x の**近傍系** (neighborhood system) と呼ぶ．x の近傍系を $\mathfrak{N}(x)$ と書けばつぎのことが成り立つ．

(N 1)　$X \in \mathfrak{N}(x)$

(N 2)　$U \in \mathfrak{N}(x) \Longrightarrow x \in U$

(N 3)　$U, V \in \mathfrak{N}(x) \Longrightarrow U \cap V \in \mathfrak{N}(x)$

(N 4)　$U\in\mathfrak{N}(x)$，$U\subset V\subset X\Longrightarrow V\in\mathfrak{N}(x)$

(N 5)　$\forall U[U\in\mathfrak{N}(x)\Longrightarrow\exists V[V\in\mathfrak{N}(x)\wedge\forall y(y\in V\Longrightarrow U\in\mathfrak{N}(y))]]$.

(N 1)-(N 4) が成り立つことは定義から明らかである．(N 5) は x の任意の近傍 U に対して適当な $V\in\mathfrak{N}(x)$ をとると V の任意の元 y に対して U が y の近傍となるようにできるということを主張している．実際 V として x を元として含む X の開集合で U の部分集合となるようなものをとれば，V の任意の元 y に対して $y\in V\subset U$, $V\in\mathcal{O}$ となり，しかも V 自身 x の近傍となるので (N 5) が成り立つ．(N 1)-(N 5) を**近傍の公理** (axioms of neighborhoods) と呼ぶ．(N 1)-(N 5) は純粋に近傍の言葉のみで述べられ，開集合等の概念は混ざっていない．

例 2.11　X を離散空間，$x\in X$ とすると $\{x\}$ は x の近傍である．一方，X を密着空間，$x\in X$ とすると $\mathfrak{N}(x)=\{X\}$ となる．

例 2.12　(X, d) を距離空間，$x\in X$ とすると x の ε 近傍 $(\varepsilon>0)$ $U_\varepsilon(x)$ は x の近傍である．また U を x の任意の近傍とするとき，ε を十分小さい正の実数とすれば，$U_\varepsilon(x)\subset U$ となる (定理 2.1 参照)．

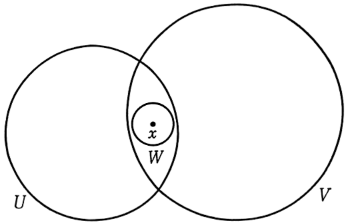
問題 2.14　$(X, \mathcal{O})$ を無限集合 X を台とする有限的位相空間，$x, y\in X$ とする．このとき $U\in\mathfrak{N}(x)$，$V\in\mathfrak{N}(y)$ とすると $U\cap V\neq\phi$ となることを示せ．——

一般に $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$x\in X$ とするとき x の近傍 U は必ず x の開近傍 V を部分集合として含む．また X が距離空間であるならば，x の近傍 U は x の適当な ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ を部分集合として含む．そこで $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$x\in X$ のとき，x の近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ の部分集合 $\mathfrak{N}_0(x)$ が与えられ，$\mathfrak{N}(x)$ の任意の元 U に対して $\mathfrak{N}_0(x)$ の元 V で $V\subset U$ となるものがあるならば，$\mathfrak{N}_0(x)$ を x の**基本近傍系** (fundamental neighborhood system)，**完全近傍系** (complete neighborhood system) または x の近傍系の**基** (base) と呼び，$\mathfrak{N}_0(x)$ の元を x の**基本近傍** (fundamental neighborhood) と呼ぶ．$\mathfrak{N}(x)$ 自身は x の基本近傍系であるが，上に述べたように $\mathfrak{N}(x)$ よりも‘簡潔な’基本近傍系をとることができる場合もある．$\mathfrak{N}_0(x)$ を X の任意の元 x の基本近傍系とするとつぎの**基本近傍系の公理** (FN 1)-(FN 4) が成り立つ．

(FN 1)　$\forall x(x\in X\Longrightarrow\mathfrak{N}_0(x)\neq\phi)$

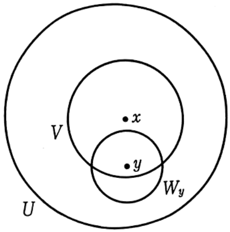
(FN 2)　$U\in\mathfrak{N}_0(x)\Longrightarrow x\in U$

(FN 3)　$U, V\in\mathfrak{N}_0(x)\Longrightarrow\exists W(W\in\mathfrak{N}_0(x)\wedge W\subset U\cap V)$



(FN 4)　$\forall U[U \in \mathfrak{N}_0(x) \Longrightarrow \exists V[V \in \mathfrak{N}_0(x) \wedge V \subset U \wedge \forall y[y \in V \Longrightarrow \exists W_y (W_y \subset U \wedge W_y \in \mathfrak{N}_0(y))]]]$.

(FN 1)-(FN 3) は (N 1)-(N 3) と定義から直ちに導かれる．(FN 4) の主張することは，U を x の任意の基本近傍とするとき，U に含まれる x の基本近傍 V を適当にとれば，V の任意の元 y に対して y の基本近傍 W_y で U の部分集合となるようなものをとることができるということである(図参照)．(FN 4) は



(N 5) からつぎのように導かれる．U は x の近傍でもあるから (N 5) によって $\mathfrak{N}(x)$ の元 U' を適当にとり U' の任意の元 x' に対して $U \in \mathfrak{N}(x')$ を成り立たせるようにできる．この U' に部分集合として含まれる x の基本近傍を任意に選び，それを V としよう ($V \subset U$ となる)．y を V の任意の元とすれば $y \in U'$ でもあるから $U \in \mathfrak{N}(y)$，ゆえに U に部分集合として含まれる y の基本近傍 W_y が存在する！

例 2.13　群 G とその Krull 空間 (G, Cl) を考えよう．$S \subset G$，$g \in G$ とすると，$g \in Cl(S)$ が成り立つためには G の任意の指数有限正規部分群 N に対して Ng

$\cap S \neq \phi$ となることが必要十分である．したがって G の部分集合 U が g の近傍となるためには，G の適当な指数有限正規部分群 N をとれば $Ng \subset U$ となることが必要十分である．特に G の単位元 e の基本近傍系として G の指数有限正規部分群全体から成る集合 $\tilde{N}(G)$ をとることができる．

例 2.14 (X, d) を距離空間，$x \in X$ とすると，x の基本近傍系 $\mathfrak{N}_0(x)$ として $U_{n^{-1}}(x)$ $(n \in \boldsymbol{N})$ 全体から成る集合をとることができる．——

例 2.14 の場合のように位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，X の各元 x に対して可算個の元から成る基本近傍系 $\mathfrak{N}_0(x)$ をとることができるとき，$(X, \mathcal{O})$ は**第 1 可算公理** (first countability axiom) を満たすという．

問題 2.15 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第 2 可算公理を満たせば $(X, \mathcal{O})$ は第 1 可算公理をも満たすことを示せ．

問題 2.16 整数環 $\boldsymbol{Z}$ の加法群の Krull 空間は第 2 可算公理を満たすことを示せ．

問題 2.17 集合 X を台とする有限的位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，つぎの (i)-(iii) は互いに同値であることを示せ．

(i) $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たす

(ii) $(X, \mathcal{O})$ は第 1 可算公理を満たす

(iii) X は可算集合である．——

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第 1 可算公理を満たしても，$(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たすとは限らない (例 2.16 参照)．ここで，再び近傍系についての考察にもどろう．

X を集合とし X の各点 x に対して $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathfrak{N}_0(x)$ が与えられ (FN 1)-(FN 4) が満たされているとしよう．ここで，各 x に対して $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathfrak{N}(x)$ を

$$\mathfrak{N}(x) = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists V (V \in \mathfrak{N}_0(x) \wedge V \subset U)\}$$

によって定めれば，近傍の公理 (N 1)-(N 5) が満たされる (読者自ら確かめられたい)．すなわち近傍の公理 (N 1)-(N 5) と基本近傍系の公理 (FN 1)-(FN 4) とは同値である．

§2.1 で位相空間の定義をするために閉包の公理 (Cl 1)-(Cl 4) を述べ，§2.2 では閉集合の公理 (C 1)-(C 3)，開集合の公理 (O 1)-(O 3) を述べ，(C 1)-(C 3) と (O 1)-(O 3) が同値であること，さらに (C 1)-(C 3) と (Cl 1)-(Cl 4) とも同値

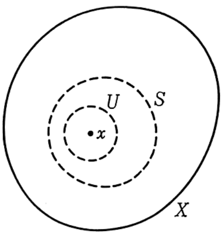
であることを見た．また§2.3では近傍の公理(N 1)-(N 5)と基本近傍系の公理(FN 1)-(FN 4)を述べ，それらが同値であることを上に注意した．つぎの§2.4では(N 1)-(N 5)を出発点とし，それらから閉集合，開集合の概念が定義され，したがって(Cl 1)-(Cl 4)も導かれることを述べよう．(Hausdorff は近傍系を用いて位相空間を定義した．もっとも，かれの用いた‘近傍’は開近傍であった.)

§2.4 近傍系と位相

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$S \subset X$ とする．X の各元 x に対して $\mathcal{O}$ に関する近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ が与えられているとし，

$$S^i = \{x \in S \mid \exists U(U \in \mathfrak{N}(x) \wedge U \subset S)\}$$

とおき S^i を S の**開核**(open kernel または interior)と呼び，S^i の元を S の**内点**(inner point, interior point)と呼ぼう．(たとえば X として1次元 Euclid



空間 $\boldsymbol{R}$ をとり $S=[0, 1]$ とすると $S^i=(0, 1)$ である．また $\{0\}^i=\phi$ となる.) S^i は‘$\mathfrak{N}(x)$ の言葉’によって定義されるが，実は S^i は S に部分集合として含まれる開集合の中で‘最大’のものになる．実際 T を S に部分集合として含まれる開集合とし，x を T の元とすれば T は $\mathfrak{N}(x)$ の元であり，しかも $T \subset S$ となるから $x \in S^i$，ゆえに $T \subset S^i$ が成り立つ．また S^i が開集合であることを見るために $x \in S^i$ とするとき $\mathfrak{N}(x)$ の元 U で $U \subset S$ となるものをとると開集合 V で x を元として含み，$V \subset U$ となるものがあることに注意し，そのような V を各 $x \in S^i$ に対して一つ選んで V_x と書こう．すると，明らかに $S^i = \bigcup_{x \in S^i} V_x$ となり，各 V_x は開集合だから S^i も開集合となる！　したがって，S が開集合であるためには $S^i = S$ となることが必要十分である．

さてここで X を集合とし X の各点 x に対して $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathfrak{N}(x)$ が与えられ，命題 (N 1)-(N 5) が満たされているとする．このとき，$\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid S^i = S\}$$

によって定めよう．$\mathcal{O}$ は (O 1)-(O 3) を満たすことが予想される．(O 1) が成り立つこと，すなわち $X, \phi \in \mathcal{O}$ となることは明らかである ($X \in \mathfrak{N}(x)$ $(x \in X)$ となる)．(O 2) は (N 3) から導かれる．(O 3) の成り立つことも容易にわかる．こうして，(N 1)-(N 5) と (O 1)-(O 3) とは同値であることがわかる．またこのとき $U \in \mathfrak{N}(x)$ をとれば (N 2) より $x \in U^i \subset U$，ゆえに U は $\mathcal{O}$ の元 U^i で $U^i \ni x$ となるものを部分集合として含む．逆に $\mathcal{O}$ の元 S で x を含むものをとり $U \supset S$ となる X の部分集合 U をとれば $U \in \mathfrak{N}(x)$ となる．§2.2 で述べたように，(O 1)-(O 3) が成り立つような $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ が与えられればそれを X の位相とする位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が得られる．したがって，X の位相を与えるためには X の各点 x に対して $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathfrak{N}(x)$ を (N 1)-(N 5) が満たされるように定めることができれば十分である．このようにして定まる X の位相 $\mathcal{O}$ を '近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ $(x \in X)$ によって定まる X の位相' と呼ぼう．前節で述べたように，X の各元 x に対して $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathfrak{N}_0(x)$ で (FN 1)-(FN 4) を満たすものが与えられれば $\mathfrak{N}_0(x)$ を x の基本近傍系とする近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ が得られ，したがって X の位相 $\mathcal{O}$ が定まる．このとき X の任意の部分集合 S に対して，

$$S^i = \{x \in S \mid \exists U(U \in \mathfrak{N}_0(x) \wedge U \subset S)\}$$

となる．こうして，X の各元 x に対して x の基本近傍系を与えることによって X の位相を定めることができる．

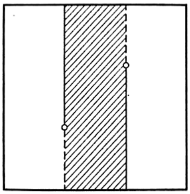
例 2.15 $(X, \prec)$ を全順序集合とし，X の元 x に対して $s(x)$ を x の下切片，$s'(x)$ を x の上切片としよう．($s(x) = \{y \in X \mid y \precneqq x\}$，$s'(x) = \{y \in X \mid x \precneqq y\}$.) $s'(x) \cap s(y) = (x, y)$ $(x, y \in X)$ と表わし，$\mathcal{P}(X)$ の元で $(x, y), s(x), s'(y)$ と表わされるもの，または X 自身を X の**区間** (interval) と呼ぶことにする．X の区間全体の成す集合を $I(X)$ と表わそう．さて X の元 x に対して

$$\mathfrak{N}_0(x) = \{U \in I(X) \mid x \in U\}$$

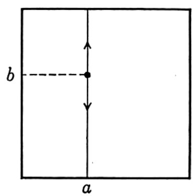
とおけば，$\mathfrak{N}_0(x)$ は (FN 1)-(FN 4) を満たす (読者自ら確かめられたい)．こうして X の位相 $\mathcal{O}$ を定め $\mathfrak{N}_0(x)$ が各 x に対して x の基本近傍系となるようにす

ることができる．この位相 $\mathcal{O}$ を $(X, \prec)$ の**順序位相** (order topology) と呼ぶ．たとえば，$(\boldsymbol{R}, \leqq)$ の順序位相は Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の位相と一致する．

例 2.16 $I=[0, 1]$，$X=I\times I$ (直積) とし，$\prec$ を X の辞書式順序とする (すなわち $X\ni(a, b), (c, d)$ に対して $(a, b)\prec(c, d)$ は $a\leqq c$ または $a=c\wedge b\leqq d$ を意味するものとする)．$(X, \prec)$ は全順序集合となるから，その順序位相 $\mathcal{O}$ が得られる．$(a, b)\prec(c, d)$ のとき，X の区間 $((a, b), (c, d))$ は $\{(x, y)\in X\,|\,(a=x\wedge b<y)\vee(a<x<c)\vee(c=x\wedge d>y)\}$ という集合と等しい (図参照)．容易にわかるように，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は第 1 可算公理を満たす (たとえば点 $(1/2, 1/2)$ の基本近傍系としては区間 $((1/2, x), (1/2, y))$ $(0<x<1/2<y<1,\ x, y\in\boldsymbol{Q})$ 全体から成るものがとれる．また点 $(1/2, 0)$ の基本近傍系としては区間 $((x, y), (1/2, z))$ $(0<x<1/2,\ 0<y<1,\ 0<z<1,\ x, y, z\in\boldsymbol{Q})$ 全体から成るものがとれる)．ところが $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たさない．実際 $(X, \mathcal{O})$ は可分でさえないのである！ ($(X, \mathcal{O})$ が可分でなければ $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たさない (問題 2.12).)



$(X, \mathcal{O})$ が可分でないことを示すために，帰謬法を用い，$(X, \mathcal{O})$ が可分であるとして矛盾を導こう．S を X の可算部分集合とし $\bar{S}=X$ となるものとしよう．a を $I=[0, 1]$ の任意の元とすると，$(0, 1)$ の任意の元 b に対して $x, y\in I$ を $x<b$

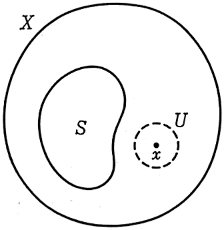


$<y$ のようにとれば,

$$U=\{(a,v)\in X\mid x<v<y\}$$

は点 (a,b) の開近傍となるから $U\cap S\neq\phi$. したがって $\{a\}\times I$ は S の可算無限個の元を含まなければならない. ところが $[0,1]$ の元 a の‘個数’, すなわち $[0,1]$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ に等しいから S の濃度も $\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ またはそれ以上ということになり, これは S が可算集合であるという仮定に矛盾する! ——

§2.1の初めに与えた Kuratowski 流の位相空間の定義においては閉包写像の概念が重要であった. X を集合, $\mathfrak{N}(x)$ を X の各元 x に対して与えられた x の近傍系(すなわち $\mathcal{P}(X)$ の部分集合で (N 1)-(N 5) を満たすもの)とし $\mathfrak{N}(x)$ $(x\in X)$ によって定まる位相において閉包写像はどのように与えられるかについて考えよう. S を X の部分集合とすると S の閉包 $Cl(S)=\bar{S}$ は§2.2で見たように S を部分集合として含む X の閉集合全体の共通部分であった. したがって, もしも x を $X-\bar{S}$ の元とすれば, 適当な X の閉集合 C で $C\supset S$ となるものをとり $x\in X-C$ となるようにすることができる. ここで $X-C=C^c$ (C の X における



補集合)は x を元として含む X の開集合となるから $\mathfrak{N}(x)$ の元となる. $C^c=U$ と書くと $U\cap S=\phi$ である. 逆に $\mathfrak{N}(x)$ の元 U で $U\cap S=\phi$ となるものがあれば, $U^i\ni x$, U^i は開集合だから $C=U^{ic}$ $(=X-U^i)$ は閉集合で $S\subset C$, $x\notin C$, ゆえに $x\notin\bar{S}$. こうして, $x\notin\bar{S}\Leftrightarrow\exists U(U\in\mathfrak{N}(x)\wedge U\cap S=\phi)$ が成り立つことがわかった. これから

$$\bar{S}=\{x\in X\mid\forall U(U\in\mathfrak{N}(x)\Longrightarrow U\cap S\neq\phi)\}$$

となることがわかる. こうして S の閉包を近傍系の言葉を用いて表わすことができた. この表わし方は, 距離空間の場合の閉包の定義の記述(A′)を一般化し

た形になっている．

これまでに述べて来たように，集合 X に位相を与えるためには様々の方法がある．位相空間を表わすのに (X, Cl), $(X, \mathcal{O})$ と 2 通りの記法を用いたが，他の記法(たとえば近傍系を用いるもの)をとってもよいわけである．しかし，今後は上の 2 通りの記法を用いるか，あるいは位相空間の台集合 X を‘位相空間 X’と呼んで，(X, Cl) (または $(X, \mathcal{O})$) を意味することにする．

問題 2.18　位相空間 X の部分集合 S の閉包 $\bar{S}=Cl(S)$ を S^a と書き，S の X における補集合 $X-S$ を S^c, S の開核を S^i と表わせば，

$$S^{ii}=S^i,\quad S^{cac}=S^i,\quad S^{ca}=S^{ic},\quad S^{cic}=S^a,\quad S^{ci}=S^{ac}$$

が成り立つことを示せ．——

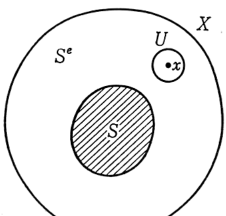
X を位相空間，$S\subset X$ とするとき $\bar{S}$ の X における補集合 $X-\bar{S}$ を S の**外部** (exterior) と呼び S^e と表わし，S^e の元を S の**外点** (exterior point) と呼ぶ．定義より

$$S^e=\{x\in X\,|\,\exists U(U\in\mathfrak{N}(x)\wedge U\cap S=\phi)\}$$

(ただし $\mathfrak{N}(x)$ は x の近傍系) が成り立つ．またこのとき

$$S^b=\{x\in X\,|\,\forall U(U\in\mathfrak{N}(x)\Longrightarrow U\cap S\neq\phi\wedge U\cap S^c\neq\phi)\}$$

とおいて S^b を S の**境界** (boundary, frontier) と呼び，S^b の元を S の**境界点**



(boundary point) と呼ぶ．S^b を ∂S と表わすこともある．明らかに $X=S^i\cup S^b\cup S^e$ で，これらの部分集合は互いに共通部分を持たない．$S^i=\phi$ となるとき S は**縁集合** (border set) と呼ばれる．1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $\boldsymbol{Q}$ は縁集合，$\boldsymbol{Z}$ も縁集合である．$\bar{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{R}$ はもはや縁集合ではないが，$\bar{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Z}$ は再び縁集合となる．一般に位相空間 X の部分集合 S が $\bar{S}^i=\phi$ を満たすとき S は (X において)

粗(nowhere dense) であるという．S が X において粗であるためには，X の任意の元 x と $\mathfrak{N}(x)$ の任意の元 U に対して $U \not\subset \bar{S}$ が成り立つことが必要十分である．したがって，この定義は距離空間の場合の定義を拡張したものとなっている．

問題 2.19　X を位相空間，S を X の開集合(または閉集合)とすると，S の境界 S^b は粗であることを示せ．

問題 2.20　$(X, \mathcal{O})$ を無限集合 X を台とする有限的位相空間とすると，X の部分集合 S が粗であるためには S が有限集合であることが必要十分であることを示せ．——

問題 2.19 に述べられていることから，Euclid 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の円周は粗である．そして第1章定理 1.9 で示されたように完備距離空間 X の可算個の粗な部分集合の和集合 S をとると $X-S$ は X の到る所で稠密だから，$\boldsymbol{R}^2$ の中の可算個の円周の和集合を S とすると S は $\boldsymbol{R}^2$ を埋めつくさないばかりか，$\overline{\boldsymbol{R}^2-S}=\boldsymbol{R}^2$ となるのである．

一般に X を位相空間，$S \subset X$ とするとき，可算個の粗な X の部分集合 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ があって $S=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ と書けるならば，S は X の**第1類の集合** (set of first category) と呼ばれ，S が第1類の集合ではないとき S は X の**第2類の集合** (set of second category) と呼ばれる．$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の第1類の集合であるが，$\boldsymbol{R}$ は第2類の集合である．位相空間 X は，X の第1類の部分集合の補集合が必ず X の到る所で稠密であれば **Baire 空間** (Baire space) と呼ばれる．定理 1.9 により完備距離空間は Baire 空間である．Baire 空間の性質は解析学の興味深い諸定理を証明するために用いられるが，ここではつぎの一般的な定理を挙げておこう．

定理 2.3　X を位相空間とするとつぎの (i)-(iv) は互いに同値である．

(i)　X は Baire 空間である

(ii)　X の空ではない開集合は第2類の集合である

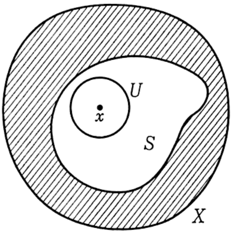
(iii)　S_λ $(\lambda \in \Lambda;\ \Lambda$ は可算集合$)$ を X の閉集合で $S_\lambda^i=\phi$ $(\lambda \in \Lambda)$ とすれば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は内点を持たない

(iv)　U_λ $(\lambda \in \Lambda;\ \Lambda$ は可算集合，$\Lambda \neq \phi)$ を X の開集合で $\bar{U}_\lambda=X$ $(\lambda \in \Lambda)$ とすれば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ も X の到る所で稠密である．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii)：U を X の空ではない開集合とし，(i) を仮定して U が第2類の集合であることを示す．実際 U が第1類の集合であるとすると，$X-U$

は X の到る所で稠密でなければならないが，U の元 x をとると U は x の近傍であって $U\cap(X-U)=\phi$ だから $\overline{X-U}\neq X$ となって矛盾が導かれた．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：S を X の第1類の集合とし，$X-S$ が X の到る所で稠密ではないとして (ii) の否定を導こう．$\overline{X-S}\subsetneqq X$ とするのだから当然 $S\neq\phi$ であり，S の元 x を適当に選び $X-S$ が $\{x\}$ においては稠密でないようにすることができる．したがって x を含む開集合 U を適当に選んで $U\cap(X-S)=\phi$ となるようにすることができる．ところが $U\cap(X-S)=\phi\Longrightarrow U\subset S$ が成り立つから U は第1類の集合の部分集合である (図参照)．そこで $S=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$ (R_λ は粗集合，Λ は可算



集合) とすると $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U\cap R_\lambda)$ であるが粗集合の部分集合は明らかに粗集合となるから U も第1類の集合となって (ii) の否定が導かれる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：$\bar{S}_\lambda=S_\lambda$，$S_\lambda{}^i=\phi$ ($\lambda\in\Lambda$) ならば S_λ は粗であるから $S=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda$ は第1類の集合である．$S^i\ni x$ ならば x を含む開集合 U で S の部分集合となるものがあるが，(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明で示したように第1類の集合の部分集合はまた第1類の集合であり，これは (ii) に矛盾する．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：U を X の空ではない開集合で $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$ (R_λ は粗集合，Λ は可算集合) とすると (iii) の否定が導かれる．実際 $\bar{R}_\lambda{}^i=\phi$ だが，$U\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bar{R}_\lambda$ だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bar{R}_\lambda$ は内点を持つ．

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)：S を X の部分集合とすると，$S^i=\phi\Longleftrightarrow(\overline{X-S})=S^{ca}=S^{ic}=\phi^c=X$ (問題 2.18 参照) だから (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) が成り立つ．∎

問題 2.21 無限集合 X を台とする有限的位相空間が Baire 空間であるための必要十分条件は，X が非可算集合であることを示せ．

§2.5　有向点列の収束，フィルター

距離空間 (X, d) において，X の部分集合 S の閉包 $\bar{S}$ は S の触点全体の成す X の部分集合として定義された．一般の位相空間 (X, Cl) においても，X の部分集合 S の閉包 $\bar{S}=Cl(S)$ に属する元を S の**触点** (adherent point) と呼ぶ．X の元 x が S の触点となるための必要十分条件は

$$\forall U(U\in\mathfrak{N}(x) \Longrightarrow U\cap S\neq\phi) \qquad (\mathfrak{N}(x) \text{ は } x \text{ の近傍系})$$

が成り立つことである．特に

$$\forall U(U\in\mathfrak{N}(x) \Longrightarrow U\cap(S-\{x\})\neq\phi)$$

が成り立つとき，距離空間の場合と同様に，x は S の**集積点** (accumulating point) と呼び，$\bar{S}$ の元で S の集積点ではないものがあればそれを S の**孤立点** (isolated point) と呼ぶ．x が S の集積点で，$S\subset T\subset X$ ならば当然 x は T の集積点でもある．

X が計量 d を持ち $x\in X$ が $S\ (\subset X)$ の集積点であれば S の点列 $(s_n)_{n\in N}$ で x に収束するものをとることができる．実際各 $n\in N$ について x の近傍 $U_{n^{-1}}(x)$ から1点 s_n を選べば $(s_n)_{n\in N}$ は明らかに x に収束する．収束点列の概念は一般の位相空間についても定義される．そのためにまず‘点列’の概念を少しばかり一般化しよう．

順序集合 $(\Lambda, \prec)$ において，Λ の任意の有限部分集合が上に有界であるとき $(\Lambda, \prec)$ を**有向集合** (directed set) と呼ぶ．N はふつうの順序に関して有向集合となる．一般に全順序集合は有向集合である．また全順序集合でなくとも $(\mathcal{P}(A), \subset)$ ($\mathcal{P}(A)$ は集合 A のべき集合，A の濃度は2以上とする；$\subset$ は包含関係) は有向集合となる $\left(S_1, \cdots, S_n\in\mathcal{P}(A) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i\supset S_j,\ j=1, \cdots, n\right)$．有向集合 $(\Lambda, \prec)$ ($\Lambda\neq\phi$) の台集合 Λ から集合 X への写像 f を X の**有向点列** (directed sequence) または**有向点族** (directed family of points) と呼び，$f(\lambda)=x_\lambda$ のとき f を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とも表わす．

さて，位相空間 X の有向点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が X の元 x に**収束する** (converge) とは，x の任意の近傍 U に対して適当な $\lambda_0\in\Lambda$ をとれば，$\lambda_0\prec\lambda$ となる Λ の任意の元 λ に対して $x_\lambda\in U$ が成り立つときにいう．このとき $\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda=x$ または，$x_\lambda\to x\ (\lambda\in\Lambda)$ と書く．特に $(\Lambda, \prec)$ として $(N, \leqq)$ をとり X として距離空間をとれば，この定義は第1章で与えた X の点列の収束の定義と一致する．

問題 2.22　無限集合 X を台集合とする有限的位相空間において，$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列で $x_n \neq x_m$ $(n\neq m)$ となるものとすると，$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は X の任意の点に収束することを示せ．

問題 2.23　$\boldsymbol{Z}$ の加法群の Krull 空間においてつぎの (i), (ii) が成り立つことを示せ．

(i)　点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ (ただし $x_n=n$) は $\boldsymbol{Z}$ のどの元にも収束しない

(ii)　点列 $(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ $(y_n=n!)$ は 0 に収束する．——

位相空間 X の元 x に収束する X の有向点列 $f=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとしよう．ここで λ_0 を Λ の元とするとき $f(\Lambda)$ の部分集合 $\{x_\lambda\in f(\Lambda)\mid\lambda\in\Lambda\wedge\lambda_0\prec\lambda\}$ を単に $\{x_\lambda\mid\lambda_0\prec\lambda\}$ と略記して

$$\mathcal{B}=\{S\in\mathcal{P}(X)\mid\exists\lambda_0(\lambda_0\in\Lambda\wedge S=\{x_\lambda\mid\lambda_0\prec\lambda\})\}$$

とおく．$\mathcal{B}$ は‘X の元 x に向って伸びている $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ という何本ものつるの先端’から成る集合であるが，$\mathcal{B}$ についてつぎのことが成り立つ．

(FB 1)　$\phi\notin\mathcal{B}$

(FB 2)　$S, T\in\mathcal{B}\Longrightarrow\exists U(U\in\mathcal{B}\wedge U\subset S\cap T)$.

(FB 1) が成り立つことは明らかである．また $S=\{x_\lambda\mid\lambda_0\prec\lambda\}$，$T=\{x_\lambda\mid\lambda_1\prec\lambda\}$ $(\lambda_0, \lambda_1\in\Lambda)$ とすれば Λ は有向集合であるから $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ は上界 λ_2 を持ち，$U=\{x_\lambda\mid\lambda_2\prec\lambda\}$ は (FB 2) の条件を満たす．

一般に集合 X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が上の (FB 1), (FB 2) を満たすとき $\mathcal{B}$ を X の**フィルター基** (filter base) といい，(FB 1), (FB 2) を**フィルター基の公理**と呼ぶ．集合 X のフィルター基 $\mathcal{B}$ が与えられたとき

$$\mathcal{F}=\{S\in\mathcal{P}(X)\mid\exists T(T\in\mathcal{B}\wedge T\subset S)\}$$

とおこう．$\mathcal{F}$ は‘$\mathcal{B}$ という骨組に肉付けして得られる’$\mathcal{P}(X)$ の部分集合であるが，$\mathcal{F}$ は明らかにつぎの (F 1)-(F 4) を満たす．

(F 1)　$\phi\notin\mathcal{F}$

(F 2)　$X\in\mathcal{F}$

(F 3)　$S\in\mathcal{F}$, $S\subset T\subset X\Longrightarrow T\in\mathcal{F}$

(F 4)　$S, T\in\mathcal{F}\Longrightarrow S\cap T\in\mathcal{F}$.

一般に $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が (F 1)-(F 4) を満たすとき $\mathcal{F}$ は X の**フィルター** (filter) と呼ばれ，特に $\mathcal{F}$ が上のように X のフィルター基 $\mathcal{B}$ から得られるとき

$\mathcal{F}$ は $\mathcal{B}$ によって**生成される** (generated) フィルターと呼ばれる．(F 1)-(F 4) は**フィルターの公理**と呼ばれる．(フィルターは Bourbaki の導入した概念である.)

X を位相空間，x を X の元，$\mathfrak{N}(x)$ を x の近傍系とすれば $\mathfrak{N}(x)$ は X のフィルターとなる．X のフィルター $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{N}(x)\subset\mathcal{F}$ となるとき x に**収束する** (converge) といい，$\mathcal{F}\to x$ と書く．X の有向点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき $\{x_\lambda\mid\lambda_0<\lambda\}$ $(\lambda_0\in\Lambda)$ という形の X の部分集合全体から成るフィルター基によって生成されるフィルターを $\mathcal{F}$ とすると，$\mathcal{F}$ が x に収束するための必要十分条件は x の任意の近傍 U に対して適当な $\lambda_0\in\Lambda$ をとると $\{x_\lambda\mid\lambda_0<\lambda\}\subset U$ となることに他ならない．したがってこのとき $\mathcal{F}$ が x に収束することと有向点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が x に収束することとは同値である．

集合 X のフィルター全体から成る $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の部分集合を $\tilde{\mathcal{F}}$ としよう．$\tilde{\mathcal{F}}$ は包含関係に関して順序集合となる．$\tilde{\mathcal{F}}$ に含まれる空ではない鎖 $\tilde{C}$ をとると $\bigcup\tilde{C}$ は明らかにまた X のフィルターになり，$\bigcup\tilde{C}=\sup\tilde{C}$ となるから $\tilde{\mathcal{F}}$ は帰納的順序集合となる．したがって，Zorn の補題により $\mathcal{F}$ を X の任意のフィルターとすると $\mathcal{F}$ を部分集合として含む X の**極大フィルター** (maximal filter) すなわち $\tilde{\mathcal{F}}$ の極大元が存在する．

§2.6 分離公理

位相空間の例として距離空間，Krull 空間，Zariski 空間，有限的位相空間などを挙げたが，それらを分類する一つの方法として以下に述べる (T_0)-(T_4) の Alexandroff-Hopf の**分離公理** (separation axioms) を用いるものがある．まず，位相空間 X に関するつぎの命題を考えよう．

(T_0)　X の任意の元 x, y $(x\neq y)$ に対してそれらの一つの近傍で他の一つを含まないものが存在する．

命題 (T_0) は **Kolmogorov の分離公理**と呼ばれ (T_0) を満たす位相空間 X は **T_0 空間** (T_0-space) または **Kolmogorov 空間**と呼ばれる．距離空間は T_0 空間であるが，2個以上の元を含む集合を台集合とする密着空間は T_0 空間ではない．つぎに位相空間 X に関する命題で (T_0) よりいくらか強いつぎの命題を考えよう．

(T_1)　X の任意の元 x, y $(x\neq y)$ に対して x の近傍 U で $y\notin U$ となるものがある．

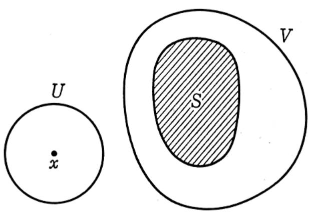
(T$_1$) は**第 1 分離公理**または **Fréchet の分離公理**と呼ばれ (T$_1$) を満たす位相空間を **T_1 空間** (T_1-space) または **Fréchet 空間**と呼ぶ. X が T_1 空間となるための必要十分条件は X の任意の元 x について $\overline{\{x\}}=\{x\}$, すなわち $\{x\}$ が閉集合となることである. T_1 空間は当然 T_0 空間ともなる. 距離空間は T_1 空間である. また有限的位相空間も T_1 空間となる. (T$_0$) を満たすが (T$_1$) は満たさない位相空間 X として, 2 元 a, b から成る集合 $X=\{a, b\}$ を台集合とし, $\mathcal{O}=\{\phi, X, \{b\}\}$ をその位相とするものが挙げられる. この位相空間 ($\{a, b\}, \mathcal{O}$) を **2 点空間** (two points space) と呼ぶ. さて, 位相空間 X について (T$_1$) よりもさらに強いつぎの命題を考える.

(T$_2$) X の任意の元 x, y $(x \neq y)$ に対して x の近傍 U, y の近傍 V をそれぞれ適当に選んで $U \cap V=\phi$ とすることができる.

(T$_2$) は**第 2 分離公理**または **Hausdorff の分離公理**と呼ばれ, (T$_2$) を満たす位相空間は **T_2 空間** (T_2-space) または **Hausdorff 空間**と呼ばれる. 距離空間は T_2 空間である. また (T$_2$) $\Longrightarrow$ (T$_1$) が成り立つことは自明であるが, 無限集合を台集合とする有限的位相空間は T_1 空間ではあっても (T$_2$) を満たさないので, (T$_1$) $\Longrightarrow$ (T$_2$) は成り立たない. また K を無限個の元をもつ可換体とするとき K^n の Zariski 空間は T_1 空間ではあるが Hausdorff 空間ではない. (T$_2$) が成り立つとき X の元 x, y $(x \neq y)$ は近傍 U, V によって**分離される** (separated) という. さて, つぎの命題は位相空間 X の元 x と X の閉集合で x を含まないものが開集合によって'分離'されるという条件を表わす.

(R) X の元 x と X の閉集合 S で x を含まないものが与えられたとき, X の開集合 U, V があり, $x \in U$, $S \subset V$ かつ $U \cap V=\phi$ となる.

位相空間 X が (R) を満たすとき X を**正則空間** (regular space) と呼ぶ. 正則



空間 X においては，しかし X の元 x 1個から成る集合 $\{x\}$ は閉じているとは限らない．実際つぎの例2.17では (R) を満たすが (T_1) を満たさない位相空間の例が示される．

例 2.17 $X=\{a,b,c\}$ (a, b, c は相異なる)，$\mathcal{O}=\{X, \phi, \{a\}, \{b,c\}\}$ とすれば，$\mathcal{O}$ は開集合の公理 (O 1)-(O 3) を満たし $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．たとえば $\overline{\{b\}}=\{b,c\}=\overline{\{c\}}$．$b$ を含む開集合は必ず c をも含むので $(X, \mathcal{O})$ は (T_0) を満たさず，したがって (T_1) をも満たさないが容易に確かめられるように $(X, \mathcal{O})$ は (R) を満たす．——

正則空間 X が (T_1) を満たすとき X は **T_3 空間** (T_3-space) と呼ばれる．((R) を満たす位相空間を T_3 空間と呼び，(R) および (T_2) を満たす位相空間を正則空間と呼ぶ書物も多い.) 距離空間は T_3 空間となるがそのことを証明するために，まずつぎの定理を示そう．

定理 2.4 位相空間 X が正則であるための必要十分条件は，X の任意の元 x と x を含む X の任意の開集合 U が与えられたとき X の開集合 V を適当にとり

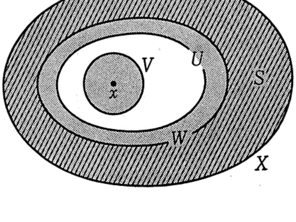
$$x \in V \subset \bar{V} \subset U$$

が成り立つようにすることができることである．

証明 X を正則としよう．U の補集合 $U^c=X-U$ を S とおけば条件により S は x を含まない閉集合であるから X の適当な開集合 V, W をとれば

$$x \in V, \quad S \subset W, \quad V \cap W = \phi$$

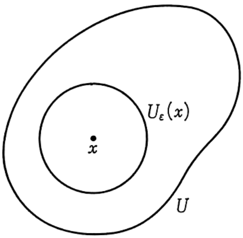
が成り立つ．ここで $V \subset W^c \subset U$，しかも W^c は閉集合だから $x \in V \subset \bar{V} \subset W^c \subset U$ となる．



逆に定理の条件が成り立つとし x を X の元，S を X の閉集合で x を含まないものとしよう．このとき S^c は x を含む開集合であるから，仮定により X の開集合 V を適当にとれば $x \in V$，$\bar{V} \subset S^c$ が成り立つ．$\bar{V} \subset S^c$ より $\bar{V}^c \supset S$，さらに $V \cap \bar{V}^c = \phi$，また $\bar{V}^c$ は開集合であるから x と S とは開集合によって分離される．▌

系 距離空間は T_3 空間である．

証明 X を距離空間とする．X は T_1 空間であるから，X が T_3 空間であることを示すには X が正則空間であることを証明すればよい．$x \in X$，U を X の開集合で x を含むものとしよう．すると十分小さい正の実数 ε をとれば x の ε 近



傍 $U_\varepsilon(x)$ は与えられた U に部分集合として含まれる．ここで $V = U_{\varepsilon/2}(x)$ とおけば明らかに $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ となる．▌

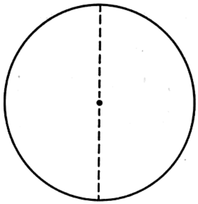
問題 2.24 群 G の Krull 空間は正則空間となることを示せ．特に $\boldsymbol{Z}$ の加法群の Krull 空間は T_3 空間となることを示せ．——

T_3 空間はいうまでもなく T_2 空間となるが，その逆は正しくはないことがつぎの例で示される．

例 2.18 $X = \boldsymbol{R}^2$ とし，その元 $x = (x_1, x_2)$ に対して

$$V_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) - \{y \in X \mid y = (x_1, y_2) \wedge y_2 \neq x_2\}$$

とおく ($\varepsilon > 0$)．$V_\varepsilon(x)$ は x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ から x と同じ第1座標を持つ点 $y = (x_1, y_2)$ で x 以外のものを取り除いて得られる集合である (図参照)．ここで $\mathfrak{N}_0(x) = \{V \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\varepsilon(\varepsilon > 0 \wedge V = V_\varepsilon(x))\}$ とおいて X の各元 x に $\mathfrak{N}_0(x)$ を対応させれば (FN 1)-(FN 4) が満たされることがわかる．ゆえに，$\mathfrak{N}_0(x)$ を x の基本近傍系として X に位相空間の構造を与えることができる．このようにして



定義された位相に関して X は明らかに T_2 空間となるが，X は正則ではない．実際 $x=(0, 0)$，$S=\{y\in X \mid y=(0, y_2),\ y_2\neq 0\}$ とおけば S は X の閉集合であり



x を含まないが，x と S とは開集合によって分離されない！ ——

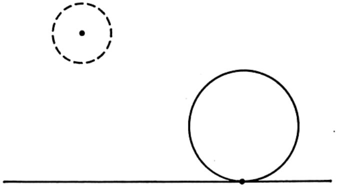
T_3 空間 X においては X の各元 x は閉じており，x とそれを含まない X の閉集合は開集合によって分離されるのであった．ここで条件をさらに強めて位相空間 X の閉集合 S, T が共通部分を持たなければ S, T は開集合によって‘分離’されるという命題(N)を考えよう．

(N) S, T が X の閉集合で $S\cap T=\phi$ ならば X の適当な開集合 U, V をとり $U\supset S$, $V\supset T$ しかも $U\cap V=\phi$ がそれぞれ成り立つようにすることができる．

位相空間 X は(N)を満たすとき**正規空間**(normal space)と呼ばれる．(N)は相当に強い条件のように見えるが，正規空間で(T_0)を満たさないものもある(例2.17の空間がその例である!)．正規空間 X が(T_1)を満たすとき X は $\boldsymbol{T_4}$ **空間**(T_4-space)と呼ばれる．((N)を満たす位相空間を T_4 空間と呼び，(N)および(T_1)を満たす位相空間を正規空間と呼ぶ書物も多い．) T_4 空間は必ず T_3 空間となるが，その逆は正しくない(例2.19参照)．

例 2.19 $X=\{x\in \boldsymbol{R}^2 \mid x=(x_1, x_2),\ x_2\geqq 0\}$ とし，X の元 $x=(x_1, x_2)$ および正の実数 ε に対して

$$V_\varepsilon(x)=\begin{cases} U_\varepsilon(x)\cap X & (x_2>0;\ U_\varepsilon(x) \text{ は } x \text{ の } \varepsilon \text{ 近傍}) \\ \overline{U_\varepsilon((x_1, \varepsilon))} & (x_2=0) \end{cases}$$



とおき，

$$\mathfrak{N}_0(x)=\{U\in \mathcal{P}(X) \mid \exists\varepsilon(\varepsilon>0\wedge U=V_\varepsilon(x))\}$$

とすると (FN 1)-(FN 4) が満たされ，$\mathfrak{N}_0(x)$ を x の基本近傍系として X に位相を与えることができる．この位相空間 X を **Moore の半平面**と呼ぶ．X はこの位相に関して T_1 空間となり，特に $x=(x_1, 0)$ と表わされる点のみから成る X の部分集合は必ず閉集合となる．また X の任意の元 x と x を含む X の開集合 U が与えられたとき $\mathfrak{N}_0(x)$ の元で U に部分集合として含まれるものがある．このことから定理 2.4 を用いて X が T_3 空間となることを示すのは容易である (読者自ら実行されたい)．X が正規空間ではないことを示そう．$S=\{x\in X \mid x=(x_1, 0),\ x_1\in \boldsymbol{Q}\}$，$T=\{x\in X \mid x=(x_1, 0),\ x_1\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}\}$ とおくと S, T はともに閉集合で $S\cap T=\phi$ となる．X の開集合 U, V で

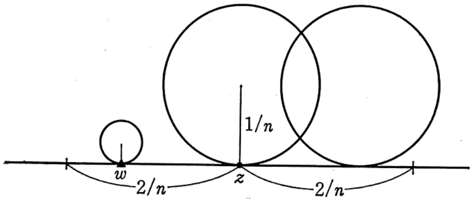
$$(*)\qquad U\supset S,\quad V\supset T,\quad U\cap V=\phi$$

を満たすものがあると仮定して矛盾を導こう．いま，自然数 n に対して

$$A_n=\{y\in \boldsymbol{R} \mid V_{n^{-1}}((y, 0))\subset U \vee V_{n^{-1}}((y, 0))\subset V\}$$

とおいて $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A_n を定める．n が大きくなるにつれて $V_{n^{-1}}((y, 0))$ は‘小さく’なるから，$y\in \boldsymbol{Q}$ ならば十分大きな n について $V_{n^{-1}}((y, 0))\subset U$，また $y\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ ならば十分大きな n について $V_{n^{-1}}((y, 0))\subset V$ となり，(*) より $\boldsymbol{R}=\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} A_n$ が成り立つ．A_n は，しかし，1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の粗な部分集合である．実際自然数 n を一つ固定したとき，任意の実数 y と任意の $\varepsilon>0$ に対して

$\boldsymbol{R}$ の中での y の ε 近傍 $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ をとると $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ の空ではない開部分集合 W で A_n の元を含まないものがあることがいえ，したがって $y \notin \bar{A}_n{}^i$ となるからである．W の選び方としては，まず $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ 自身が A_n の元を含まなければ $W=(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ とすればよい．他方 $z \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A_n$ という元 z があるとし，仮に $z \in \boldsymbol{Q}$ としよう．このときには $\delta>0$ を $(z-\delta, z+\delta) \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ かつ $\delta<2/n$ を満たすようにとれば，$(z-\delta, z+\delta) \cap A_n$ に含まれる元はすべて z と同様有理数となる $(V_{n^{-1}}((z, 0)) \subset U,\ U \cap V=\phi$ だから!)．さて $(z-\delta, z+\delta)$ に含まれる無理数 w を一つ選ぼう．仮定により $w \in V$，ゆえに $\varepsilon'>0$ を適当に小さく選べば $V_{\varepsilon'}(w) \subset V$ となる．ここで $(w-\varepsilon', w+\varepsilon') \subset (z-\delta, z+\delta)$ としてもよい（ε' を十分小さくとればよい）．さて，求める W としては $(w-\varepsilon', w+\varepsilon')$ をとることができる．$W \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ かつ $W \cap A_n=\phi$ だからである（図参照）．



上で $y \in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ としても全く同様の議論がつかえ，A_n が粗であることが示される．こうして，完備な距離空間 $\boldsymbol{R}$ が可算個の粗部分集合の和集合として表わされることになり，これは Baire の定理（定理 1.9）に反する！　こうして，(*) から矛盾が導かれ，X が正規空間ではないことが示された．

定理 2.5　距離空間は T_4 空間である．

証明　(X, d) を距離空間，S, T を X の閉集合で $S \cap T=\phi$ としよう．ここで，S, T が X の開集合 U, V によって分離されることを示せばよい．また S, T はともに空集合とは異なるものとしてよい．いま X の空ではない部分集合 A と X の元 x が与えられたとき $d(x, A)=\inf\{r \in \boldsymbol{R} \mid \exists y(y \in A \wedge r=d(x, y))\}$ とおく（$y \in A$ のとき $d(x, y) \geqq 0$ だから $d(x, A)$ は確定する）．$x, x' \in X$ のとき A の任意の元 y に対して $d(x, y) \leqq d(x, x')+d(x', y)$ となるから $d(x, A) \leqq d(x, x')+d(x', A)$ が成り立つ．したがって X の元 x に 1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の元 $d(x,$

A) を対応させる写像は (X, d) から $\boldsymbol{R}$ への連続写像となる．また，

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$$

が成り立つ．特に $d(x, S)=0 \iff x \in S$ となり，T についても同様のことが成り立つので，$S \cap T = \phi$ の場合 $d(x, S)+d(x, T)$ は X のどの元 x についても 0 とはならない．ここで，X の任意の元 x に対して

$$f(x) = d(x, S)/(d(x, S)+d(x, T))$$

とおいて写像 $f: X \to \boldsymbol{R}$ を定めよう．上に注意したことから f は連続写像となり，$x \in S$ のとき $f(x)=0$，$x \in T$ のとき $f(x)=1$，さらに $f(X) \subset [0, 1]$ となる．さて，

$$U = f^{-1}([0, 1/2)), \qquad V = f^{-1}((1/2, 1])$$

とおけば，U, V は明らかに X の開集合で，$U \cap V = \phi$，$U \supset S$，$V \supset T$ となるから定理が示された．▌

閉区間 $[0, 1]$ を 1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間と考え，**閉単位区間** (closed unit interval) とも呼んで I と表わそう．一般に位相空間 X と X の閉集合 S, T で共通部分が空であるものが与えられているとする．このとき，X から I への連続写像 f が与えられ，

$$S \subset f^{-1}(0), \qquad T \subset f^{-1}(1)$$

が成り立つならば，S, T は‘連続写像 f によって分離される’という．定理 2.5 の証明から明らかなように，S, T が連続写像 f によって分離されれば S, T は X の開集合によって分離される．したがってつぎの定理が成り立つ．

定理 2.6　位相空間 X の任意の閉集合 S, T に対して $S \cap T = \phi$ ならば S, T は X から閉単位区間 I への連続写像によって分離されるとする．このとき X は正規空間となる．——

実は定理 2.6 の逆が成り立つ．このことについては次節で説明しよう．

§2.7 Uryson の補題，Tietze の拡張定理

X を正規空間，S を X の閉集合，U を X の開集合で $U \supset S$ とすると，X の開集合 V で

$$S \subset V, \qquad \bar{V} \subset U$$

を満たすようなものが存在する (読者自ら確かめられたい)．このことを用いて，

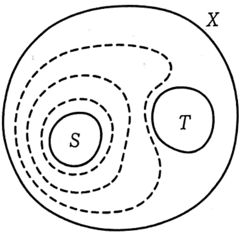
定理 2.6 の逆命題であるつぎの定理を証明することができる.

定理 2.7 (Uryson の補題) X を正規空間, S, T を X の閉集合で $S\cap T=\phi$ とすれば, X から閉単位区間 $I=[0, 1]$ への連続写像 f で, $S\subset f^{-1}(0)$, $T\subset f^{-1}(1)$ となるものが存在する.

証明 $U_1=X-T$ とおけば U_1 は X の開集合で $S\subset U_1$ となるから, X の開集合 U_0 を適当に選び

$$S\subset U_0\subset \bar{U}_0\subset U_1$$

を成り立たせることができる. ここで再び閉集合 $\bar{U}_0$ と U_1 の'中間に'開集合



$U_{1/2}$ をとって $\bar{U}_0\subset U_{1/2}\subset \bar{U}_{1/2}\subset U_1$ を成り立たせることができる. 一般に X の開集合の有限列 $\mathscr{S}=(U_{(n)})_{n=0,\cdots,k}$ を考え, $0\leqq n<k$ に対して $\bar{U}_{(n)}\subset U_{(n+1)}$ が成り立っているとき $\mathscr{S}$ を開集合の'有限鎖'と呼ぶことにし, 開集合の有限鎖全体から成る集合を $\tilde{\mathscr{S}}$ と書こう. $\tilde{\mathscr{S}}$ の任意の元 $\mathscr{S}=(U_{(n)})_{n=0,\cdots,k}$ が与えられたとき, $\tilde{\mathscr{S}}$ の元 $\mathscr{S}'$ を $\mathscr{S}'=(U_{(n)}')_{n=0,\cdots,2k}$, $U_{(2n)}'=U_{(n)}$, $\bar{U}_{(n-1)}\subset U_{(2n-1)}'\subset \bar{U}_{(2n-1)}'\subset U_{(n)}$ となるようにとることができる. $\mathscr{S}$ に $\mathscr{S}'$ を対応させる $\tilde{\mathscr{S}}$ から $\tilde{\mathscr{S}}$ 自身への写像を φ と書こう. いま特に $\mathscr{S}_0=(U_{(0)}, U_{(1)})$ を $U_{(0)}=U_0$, $U_{(1)}=U_1$ とおいて定めよう. ここで $\varphi(\mathscr{S}_0)=\mathscr{S}_1$, $\varphi(\mathscr{S}_1)=\mathscr{S}_2$, $\cdots$ と書き, 一般に $\varphi(\mathscr{S}_k)=\mathscr{S}_{k+1}$ と書こう (厳密には, 帰納定理 (第 I 部定理 2.5) によって $n\in\bar{N}$ から $\tilde{\mathscr{S}}$ への写像が定まる). ここで $\mathscr{S}_1=(U_{(n)}')_{n=0,1,2}$, $U_{(0)}'=U_0\subset\bar{U}_0\subset U_{(1)}'\subset\bar{U}_{(1)}'\subset U_{(2)}'=U_1$, $\mathscr{S}_2=(U_{(n)}'')_{n=0,\cdots,4}$, $U_{(0)}''=U_0\subset\bar{U}_0\subset U_{(1)}''\subset\bar{U}_{(1)}''\subset U_{(1)}'\subset\bar{U}_{(1)}'\subset U_{(3)}''\subset\bar{U}_{(3)}''\subset U_1$, 一般に $\mathscr{S}_k=(U_{(n)}{}^{(k)})_{n=0,\cdots,2^k}$ と書けて, $\bar{U}_{(n)}{}^{(k)}\subset U_{(n+1)}{}^{(k)}$, $U_{(2n)}{}^{(k)}=U_{(n)}{}^{(k-1)}$ となる. ここで $U_{(n)}{}^{(k)}=U_{n/2^k}$ と書こう. すると $0\leqq k/2^n<l/2^m\leqq 1$ のとき $\bar{U}_{k/2^n}\subset U_{l/2^m}$ となる. さて開区間 $(0, 1)$ に含まれる任意の実数 t に対し $V_t=\bigcup_{t>k/2^n} U_{k/2^n}$

とおく．また $V_0=U_0$，$V_1=X$ とおく．さらに，X から $I=[0,1]$ への写像 f を，$x\in X$ に対し

$$f(x)=\inf\{t\in[0,1]\mid x\in V_t\}$$

によって定義する．明らかに $S\subset f^{-1}(0)$，$T\subset f^{-1}(1)$ となる！　したがって f が連続写像であることを示せば証明が完了する．f が連続写像となることを示すためには，$0<s<1$ のとき $f^{-1}([0,s))$，$f^{-1}((s,1])$ がともに X の開集合であることを示せばよい(その理由については読者自ら考えられたい)．そのためにまず $0<t<s$ ならば $V_t\subset V_s$ となることを注意しよう．このことから

$$f^{-1}([0,s))=V_s$$

となることが容易にわかる．したがって $f^{-1}([0,s))$ は開集合である．つぎに，

$$\begin{aligned}f^{-1}((s,1])&=\{x\in X\mid f(x)\in(s,1]\}\\&=\{x\in X\mid \exists t(s<t<1\wedge x\notin V_t)\}\\&=X-\bigcap_{s<t<1}V_t\end{aligned}$$

であるが，

$$\bigcap_{s<t<1}V_t=\bigcap_{s<t<1}\bar{V}_t$$

が成り立つ．$\bigcap_{s<t<1}V_t$ が右辺の $\bigcap_{s<t<1}\bar{V}_t$ の部分集合となることは自明だから，$x\in\bigcap_{s<t<1}\bar{V}_t\Longrightarrow x\in\bigcap_{s<t<1}V_t$ が成り立つことを示そう．t を $(s,1)$ に含まれる任意の実数とすると，$s<t'<t$ を満たす実数 t' が存在する．このとき，$\bar{V}_{t'}\subset V_t$ となることがいえる．実際 $t'<k/2^n<l/2^m<t$ となるような $k/2^n$，$l/2^m$ が存在するから，$V_{t'}\subset U_{k/2^n}\subset\bar{U}_{k/2^n}\subset U_{l/2^m}\subset V_t$，したがって $\bar{V}_{t'}\subset\bar{U}_{k/2^n}\subset V_t$ となる！　$x\in\bigcap_{s<t<1}\bar{V}_t$ と仮定したのだから特に $x\in\bar{V}_{t'}$，ゆえに $x\in V_t$ となる．こうして $x\in\bigcap_{s<t<1}V_t$ が示され，$f^{-1}((s,1])=X-\bigcap_{s<t<1}\bar{V}_t$，したがって $f^{-1}((s,1])$ は開集合となることが示された．▌

問題 2.25　X を正規空間，$S_1,S_2,\cdots,S_n$ $(n\in\boldsymbol{N})$ を X の閉集合，$S_i\cap S_j=\phi$ $(1\leqq i,j\leqq n,\ i\neq j)$ とし，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ を任意の実数とすると，X から $\boldsymbol{R}$ への連続写像 f で，$f^{-1}(a_1)\supset S_1$，$f^{-1}(a_2)\supset S_2$，$\cdots$，$f^{-1}(a_n)\supset S_n$ となるものが存在することを示せ．——

T_4 空間 X の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ $(x_i\neq x_j\ (i\neq j))$ および実数 $a_1,\cdots,a_n$ が与えられたとき，X から $\boldsymbol{R}$ への連続写像 f で $f(x_i)=a_i$ となるものが存在する

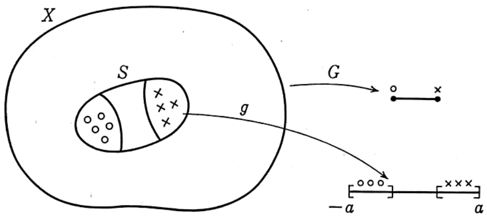
(問題2.25参照). つぎの定理は正規空間についてのさらに深い結果を述べるものである.

定理 2.8 (Tietze の拡張定理) X を正規空間, S を X の閉集合とし写像 $f:S\to[-1,1]$ が与えられ $[-1,1]$ の任意の閉集合 (ただし $[-1,1]$ を1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間と考える) の f による逆像が X の閉集合となるものとする. このとき連続写像 $F:X\to[-1,1]$ が存在し, $F|_S=f$ となる.

証明 一般に写像 $g:S\to[-a,a]$ $(a>0)$ が与えられ, $[-a,a]$ の任意の閉集合の g による逆像が X の閉集合となっているとしよう. このとき連続写像 $G:X\to[-a/3,a/3]$ が存在し

$$(*)\qquad |g(x)-G(x)|\leqq 2a/3 \qquad (\forall x\in S)$$

となることが示される. 実際このとき $S_1=g^{-1}([-a,-a/3])$, $S_2=g^{-1}([a/3,a])$ とすると仮定により S_1, S_2 は X の閉集合で $S_1\cap S_2=\phi$ となる. ゆえに Uryson の補題により連続写像 $G:X\to[-a/3,a/3]$ をとって $G(S_1)=\{-a/3\}, G(S_2)=\{a/3\}$ となるようにできる. ここで条件 $(*)$ が満たされることは明らかである. さて,



このことを定理の場合に応用し, まず連続写像 $F_0:X\to[-1/3,1/3]$ で $|f(x)-F_0(x)|\leqq 2/3$ $(\forall x\in S)$ となるものをとろう. $f_1=f-F_0$ (すなわち S の任意の元 x に対して $f_1(x)=f(x)-F_0(x)$) とおいて S から $[-2/3,2/3]$ への写像 f_1 を定める. f_1 も f と同様な条件, すなわち "$[-2/3,2/3]$ の任意の閉集合の f_1 による逆像が X の閉集合となる" という条件を満たすことは容易にわかる. したがって上の議論を再び用い, 連続写像 $F_1:X\to[-2/3^2,2/3^2]$ をとって $|f_1(x)-F_1(x)|\leqq 2^2/3^3$ $(\forall x\in S)$ を満たすことができる. この論法を繰り返して (厳密には帰納定理により) 各自然数 n に対して写像の順序対 (f_n, F_n) を選び,

$$f_n:\ S \longrightarrow [-2^n/3^n, 2^n/3^n], \qquad F_n:\ X \longrightarrow [-2^n/3^{n+1}, 2^n/3^{n+1}]$$
$$|f_n(x)-F_n(x)| \leqq 2^{n+1}/3^{n+2} \qquad (\forall x \in S)$$

を満たすようにすることができる．(F_n は連続写像である．) ここで，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \qquad (x \in X)$$

とおこう．X の任意の元 x に対して $|F_n(x)| \leqq (1/3)(2/3)^n$ だから上の和は意味を持ち，$|F(x)| \leqq 1/3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n = 1$ となる．また ε を任意の正の実数とするとき適当な自然数 N をとれば $|\sum_{n \geqq N} F_n(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in X)$ となるから F は X から $[-1, 1]$ への連続写像となることがわかる．$F|_S = f$ となることを示そう．$x \in S$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x)-F(x) &= f(x)-F_0(x)-\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = f_1(x)-\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \\ &= f_1(x)-F_1(x)-\sum_{n=2}^{\infty} F_n(x) = f_2(x)-\sum_{n=2}^{\infty} F_n(x) \\ &= \cdots = f_m(x)-\sum_{n=m}^{\infty} F_n(x), \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} |f(x)-F(x)| &= |f_m(x)-\sum_{n=m}^{\infty} F_n(x)| \leqq 2^m/3^m+\sum_{n=m}^{\infty} 2^n/3^{n+1} \\ &= 2^{m+1}/3^m \qquad (\forall m \in \boldsymbol{N}), \end{aligned}$$

したがって $|f(x)-F(x)|=0$．すなわち $f(x)=F(x)$ $(\forall x \in S)$ が成り立つ．▌

系 1　上の定理において $[-1, 1]$ を $[a, b]$ $(a<b)$ で置き換えても同様の結果が得られる．

系 2　上の定理において $[-1, 1]$ を $(-1, 1)$ で置き換えても同様の結果が成り立つ．(ただし $(-1, 1)$ を 1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間と考える．)

証明　$(-1, 1)$ は $[-1, 1]$ の部分距離空間とみなされるから，与えられた写像 $f: S \to (-1, 1)$ と包含写像 $\iota: (-1, 1) \to [-1, 1]$ を合成して S から $[-1, 1]$ への写像 $f'=\iota \circ f$ が得られる．また，$[-1, 1]$ の任意の閉集合の f' による逆像は X の閉集合となる．したがって定理より連続写像 $F': X \to [-1, 1]$ が得られ，$F'|_S = f'$ となる．ところが $F'^{-1}(\{-1, 1\}) = T$ とおくと T は X の閉集合で $S \cap T = \phi$．ここで写像 $g: S \cup T \to [-1, 1]$ を

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in S) \\ 0 & (x\in T) \end{cases}$$

によって定めよう．$[-1,1]$ の任意の閉集合 C をとると，$0\notin C$ のときは $g^{-1}(C)=f^{-1}(C\cap(-1,1))$，$0\in C$ ならば $g^{-1}(C)=f^{-1}(C\cap(-1,1))\cup T$ だから，いずれの場合にも $g^{-1}(C)$ は X の閉集合である．したがって再び定理により連続写像 $G:X\to[-1,1]$ で $G|_{S\cup T}=g$ となるものが得られる．いま，写像 F を $F(x)=(F'(x)+G(x))/2$ $(x\in X)$ によって定めよう．すると $F'(x)=\pm1$ ならば ($x\in T$ だから) $G(x)=0$ となるので $F(X)\subset(-1,1)$ が成り立つ．したがって F は X から $(-1,1)$ への連続写像となり，$F|_S=f$ となる．▌

系 3 系2において $(-1,1)$ を (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ または $\boldsymbol{R}$ で置き換えても同様の結果が得られる．($a<b$, また $(a,\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x>a\}$, $(-\infty,b)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x<b\}$ を意味する.)

問題 2.26 上の系3を証明せよ．［ヒント］ $(-1,1)$ と (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$, $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ同位相になることを示しそのことを用いるとよい．——

距離空間 X の部分集合 S は自然に距離空間の構造を持ち，そのとき S は X の部分距離空間と呼ばれることはすでに述べた．実は，次節で示すように，一般の位相空間 X とその部分集合 S についても同様のことが成り立つ．たとえば Tietze の拡張定理において，正規空間 X の閉集合 S は X の‘部分空間’として位相空間の構造を持ち，定理の条件を満たす写像 $f:S\to[-1,1]$ は‘S から $[-1,1]$ への連続写像’に他ならないのである．

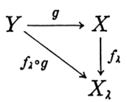
§2.8 誘導位相

集合 X が1個または何個かの位相空間と関係し合っているとき，X の位相を‘自然’な仕方で与え，初めに与えられた‘関係’が‘位相的’になるようにすることができる場合がある．たとえば X が位相空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ の台集合 Y の部分集合である場合を考えよう．$\iota:X\to Y$ を包含写像とする．ここで X の位相 $\mathcal{O}_X$ として $\mathcal{P}(X)$ をとれば $(X,\mathcal{P}(X))$ は離散空間となり ι は連続となる．しかしこの場合には X から任意の位相空間への任意の写像は連続になってしまうので，$\mathcal{O}_X$ と ι との関連はうすれてしまう．実際，X の位相の中で離散位相はもっとも強い位相である．$\mathcal{O}_X$ として ι が連続になるような位相の中でもっとも弱いものをとれるだ

ろうか．そのような $\mathcal{O}_X$ が選べたとしよう．ここで $\mathcal{O}_X'$ を X の位相で ι が連続になるようなものとすると，$\mathcal{O}_X$ が‘もっとも弱い’という仮定から恒等写像 1_X は $(X, \mathcal{O}_X')$ から $(X, \mathcal{O}_X)$ への連続写像となるはずである．また逆に $\mathcal{O}_X'$ を X の $\mathcal{O}_X$ よりも強い位相とすれば，明らかに $\iota:(X, \mathcal{O}_X')\to(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続写像となる．ゆえにこのとき，$\mathcal{O}_X'$ を X の位相とすれば，$\iota=\iota\circ 1_X$ が $(\mathcal{O}_X', \mathcal{O}_Y)$ に関して連続となることと 1_X が $(\mathcal{O}_X', \mathcal{O}_X)$ に関して連続になることとは同値となるはずである．このような位相 $\mathcal{O}_X$ が存在し確定することはつぎの定理からわかる．

定理 2.9 X を集合とする．いま，空ではない集合 Λ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ および写像の集合 $\{f_\lambda : X\to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとする．このとき X の位相 $\mathcal{O}$ でつぎの条件 (*) を満たすものが一意的に存在する．

(*) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ と写像 $g : Y\to X$ が与えられたとき g が $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ に関して連続となるためには，Λ の任意の元 λ に対して $f_\lambda\circ g : Y\to X_\lambda$ が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\lambda)$ に関して連続になることが必要十分である．



証明 定理のような X の位相 $\mathcal{O}$ が存在したとしよう．すると 1_X は明らかに $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ に関して連続だから $f_\lambda\circ 1_X=f_\lambda$ は各 $\lambda\in\Lambda$ について $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\lambda)$ に関する連続写像となるはずである．このことから，$\mathcal{O}$ が存在すれば一意的であることがわかる．実際 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相で定理の条件を満たすものとすれば，$f_\lambda=f_\lambda\circ 1_X$ は $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_\lambda)$ に関しても，$(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_\lambda)$ に関しても連続 $(\forall\lambda\in\Lambda)$ だから，1_X は $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ に関しても $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ に関しても連続となる．したがって $\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$ が成り立つ．さて，条件を満たす $\mathcal{O}$ が存在することを示そう．いま $\mathcal{S}=\{U\in\mathcal{P}(X)\mid \exists\lambda\exists U_\lambda(\lambda\in\Lambda\wedge U_\lambda\in\mathcal{O}_\lambda\wedge U=f_\lambda^{-1}(U_\lambda))\}$ とおく．$\mathcal{S}$ は明らかに開集合系の部分基の公理 (SB) を満たすので，X の位相 $\mathcal{O}$ として $\mathcal{S}$ によって生成されるものをとることができる．この $\mathcal{O}$ が (*) を満たすことをいおう．$(Y, \mathcal{O}')$, $g : Y\to X$ を定理に述べられた通りのものとする．g が $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ に関して連続ならば，Λ の任意の元 λ と $\mathcal{O}_\lambda$ の任意の元 U_λ に対して $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)\in\mathcal{O}$ だから $g^{-1}\circ f_\lambda^{-1}(U_\lambda)=(f_\lambda\circ g)^{-1}(U_\lambda)\in\mathcal{O}'$，ゆえに $f_\lambda\circ g$ は $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\lambda)$ に関して連続となる．逆に Λ の任意の元 λ に対して $f_\lambda\circ g$ が

$(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\lambda)$ に関して連続となれば，$\mathcal{O}_\lambda$ の任意の元 U_λ について $(f_\lambda \circ g)^{-1}(U_\lambda) = g^{-1}(f_\lambda^{-1}(U_\lambda)) \in \mathcal{O}'$，ところが $\mathcal{O}$ は $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ と表わされる $\mathcal{P}(X)$ の元全体の集合によって生成されるのだから，g は $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ に関して連続となる．▌

上の定理によって定められる X の位相 $\mathcal{O}$ を Λ を添数集合とする写像の集合 $\{f_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$（または単に $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$）によって**誘導される位相** (induced topology) と呼ぶ．特に $\Lambda = \{0\}$，$X \subset X_0$，f_0 は包含写像のとき $\{f_0\}$ によって誘導される X の位相 $\mathcal{O}$ を X の $(X_0, \mathcal{O}_0)$ に対する**相対位相** (relative topology) といい，このとき $(X, \mathcal{O})$ を $(X_0, \mathcal{O}_0)$ の**部分位相空間** (topological subspace) または**部分空間** (subspace) という．このとき上の証明から容易にわかるように，$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists V (V \in \mathcal{O}_0 \wedge U = V \cap X)\}$ となる．また上の定理で $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$（直積），$f_\lambda$ は X から X_λ への標準的射影とする場合 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から誘導される位相 $\mathcal{O}$ を X の（$\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に関する）**直積位相** (direct product topology) といい，$(X, \mathcal{O})$ を $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積空間** (direct product space) と呼ぶ．$\mathcal{O}$ の部分基として $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ $(U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda)$ という形の集合全体から成るものがとれる．$f_\lambda^{-1}(U_\lambda) = \{x \in X \mid f_\lambda(x) \in U_\lambda\}$ だから $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ は $U_\lambda \times \prod_{\mu \in \Lambda - \{\lambda\}} X_\mu$ と '同一視' される．したがって $\mathcal{O}$ の開基 $\mathcal{O}_0$ として有限個の $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ の共通部分として表わされるような $U \in \mathcal{P}(X)$ 全体から成るものがとれる．$U \in \mathcal{O}_0 \Longleftrightarrow \exists M[M \subset \Lambda \wedge |M| < \infty \wedge [\forall \mu (\mu \in M \Longrightarrow f_\mu(U) \in \mathcal{O}_\mu) \wedge \forall \lambda (\lambda \in \Lambda - M \Longrightarrow f_\lambda(U) = X_\lambda)]]$ が成り立つ．こうして標準的射影 f_λ は X から X_λ の上への連続写像となるのみでなく，X の任意の開集合 U の f_λ による像 $f_\lambda(U)$ は X_λ の開集合となる．一般に位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ への写像 f について，X の任意の開集合 U の像 $f(U)$ が Y の開集合となるとき f を X から Y への（$(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ に関する）**開写像** (open mapping) と呼び，一方 X の任意の閉集合 S の像 $f(S)$ が Y の閉集合となるとき f を X から Y への（$(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ に関する）**閉写像** (closed mapping) と呼ぶ．$\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ から X_λ への標準的射影は上に述べたように連続な開写像だが，一般に閉写像ではない．（たとえば Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^2$ $(= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$ の任意の元 (x_1, x_2) をその第1成分 x_1 に対応させる標準的射影を p_1 とし，$S = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$ とおくと，S は $\boldsymbol{R}^2$ の閉集合だが $p_1(S) = \boldsymbol{R} - \{0\}$ となり $p_1(S)$ は閉集合ではない．）他方，位相空間 $(X_0, \mathcal{O}_0)$ の閉集合 X が与えられ，$\mathcal{O}$ を X の $(X_0, \mathcal{O}_0)$ に対する相対位相とすると，包含写像 $\iota : X \to X_0$ は閉写像だが一般には開写像とはならない．ここで

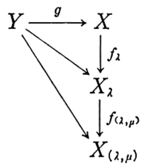
X が X_0 の開集合である場合には包含写像は開写像だが必ずしも閉写像にはならない．また，集合 X の位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が与えられ $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ ならば恒等写像 1_X は $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ に関して開写像(かつ閉写像)であるが，$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ でない限り $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ に関して連続にはならない．

問題 2.27 X を集合とする．また $\Lambda\ (\neq \phi)$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda')\}_{\lambda\in\Lambda}$，さらに写像の集合 $\{f_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と位相写像の集合 $\{g_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとする．$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ および $\{g_\lambda \circ f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される X の位相を $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ とすると $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ となることを示せ．——

部分空間，直積空間については§2.9でさらに述べるが，ここではいま少し一般的な定理を述べておこう．

定理 2.10 X を集合とする．また Λ, M を集合 $(\Lambda \neq \phi,\ M \neq \phi)$ とし $\Lambda, \Lambda\times M$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{(X_{(\lambda,\mu)}, \mathcal{O}_{(\lambda,\mu)})\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ および写像の集合 $\{f_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{f_{(\lambda,\mu)} : X_\lambda \to X_{(\lambda,\mu)}\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ が与えられ，X_λ の位相 $\mathcal{O}_\lambda$ は $\{f_{(\lambda,\mu)}\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ によって誘導されるものとする．このとき $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される X の位相は，$\{f_{(\lambda,\mu)} \circ f_\lambda\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ によって誘導される位相と一致する．

証明 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される X の位相を $\mathcal{O}_\Lambda$ と書こう．$(Y, \mathcal{O}')$ を位相空



間，g を Y から X への写像とする．g が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\Lambda)$ に関して連続となるためには

(2.2) $\qquad \forall\lambda(\lambda\in\Lambda \Longrightarrow f_\lambda\circ g$ が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\lambda)$ に関して連続)

が成り立つことが必要十分である．ところが $\mathcal{O}_\lambda$ が $\{f_{(\lambda,\mu)}\}_{\mu\in M}$ によって誘導される位相であるという仮定から $f_{(\lambda,\mu)}$ は $(\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_{(\lambda,\mu)})$ に関して連続であり，さらに $\lambda\in\Lambda$ に対して

(2.3) $\qquad f_\lambda\circ g$ が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\lambda)$ に関して連続 $\Longleftrightarrow \forall\mu(\mu\in M \Longrightarrow f_{(\lambda,\mu)}\circ(f_\lambda\circ g)$ が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_{(\lambda,\mu)})$ に関して連続)

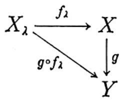
という命題が成り立つ．したがって g が $(\mathcal{O}', \mathcal{O}_\Lambda)$ に関して連続となるための必要

十分条件は，$\Lambda\times M$ の任意の元 (λ,μ) に対して $f_{(\lambda,\mu)}\circ(f_\lambda\circ g)=(f_{(\lambda,\mu)}\circ f_\lambda)\circ g$ が $(\mathcal{O}',\mathcal{O}_{(\lambda,\mu)})$ に関して連続となることに他ならない．ゆえに定理2.9より $\mathcal{O}_\Lambda$ は $\{f_{(\lambda,\mu)}\circ f_\lambda\}$ によって誘導される位相と一致する．▌

つぎの定理は定理2.9の双対命題ともいうべきものである．

定理 2.11　X を集合とし，集合 $\Lambda(\neq\phi)$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ および写像の集合 $\{f_\lambda: X_\lambda\to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとする．このとき X の位相 $\mathcal{O}$ でつぎの条件 (∗∗) を満たすものが一意的に存在する．

(∗∗)　位相空間 $(Y,\mathcal{O}')$ と写像 $g: X\to Y$ が与えられたとき g が $(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ に関して連続となるためには，Λ の任意の元 λ に対して $g\circ f_\lambda: X_\lambda\to Y$ が $(\mathcal{O}_\lambda,\mathcal{O}')$ に関して連続になることが必要十分である．



証明　一意性の証明は定理2.9の場合とまったく同様な方法で与えられるから読者に任せる．$\mathcal{O}$ の存在を示そう．もしも定理の条件を満たす $\mathcal{O}$ が存在すれば 1_X は $(\mathcal{O},\mathcal{O})$ に関して連続だから，f_λ は $(\mathcal{O}_\lambda,\mathcal{O})$ に関して連続とならなければならない $(\forall\lambda\in\Lambda)$．ゆえに，そのような $\mathcal{O}$ の任意の元 U をとると Λ の各元 λ に対して $f_\lambda^{-1}(U)\in\mathcal{O}_\lambda$ が成り立つはずである．ここで，

$$\mathcal{O}=\{U\in\mathcal{P}(X)\mid\forall\lambda(\lambda\in\Lambda\Longrightarrow f_\lambda^{-1}(U)\in\mathcal{O}_\lambda)\}$$

とおこう．$\mathcal{O}$ が開集合の公理 (O 1)-(O 3) を満たすことは容易に確かめられるから，$(X,\mathcal{O})$ は位相空間となる．また $\mathcal{O}$ を上のように定めると (∗∗) が満たされることも直ちに確かめられる．▌

上の定理によって一意的存在が示された X の位相 $\mathcal{O}$ を $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって **co 誘導される位相** (coinduced topology) という．特に $\Lambda=\{0\}$，$f_0: X_0\to X$ が全射である場合，$\{f_0\}$ によって co 誘導される X の位相 $\mathcal{O}$ を $\{f_0\}$ によって定まる X の**商位相** (quotient topology) と呼び，$(X,\mathcal{O})$ を $(X_0,\mathcal{O}_0)$ の**商（位相）空間** (quotient (topological) space) という．

また Λ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda=\left\{x\in\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right)\times\Lambda\;\middle|\;\exists\lambda[\lambda\in\Lambda\wedge[\exists x_\lambda(x_\lambda\in X_\lambda\wedge x=(x_\lambda,\lambda))]]\right\}$$

とおこう．$\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda$ の各元 x は (x_λ, λ) $(\lambda\in\Lambda)$ と表わされる順序対である．上で X_λ 同士は共通部分を持つこともあるが，このように各 $x_\lambda\in X_\lambda$ に λ の‘荷札’をつけておけば $(x_\lambda, \lambda)\neq(x_\mu, \mu)$ $(\lambda\neq\mu)$ となって (x_λ, λ) 同士は互いに区別される．$\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda$ を $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の **disjoint sum** と呼ぶ．各 X_λ から $\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda$ への写像 f_λ を $f_\lambda(x_\lambda)=(x_\lambda, \lambda)$ によって与え，$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって co 誘導される位相を $\mathcal{O}$ とするとき，$(\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda, \mathcal{O})$ をも $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の **disjoint sum** と呼ぶ．

Λ $(\neq\phi)$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ (直和) であるとしよう $(X_\lambda\cap X_\mu=\phi$ $(\lambda\neq\mu))$．写像 $f_\lambda: X_\lambda\to X$ として包含写像をとる．このとき $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって co 誘導された位相 $\mathcal{O}$ は $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和位相** (direct sum topology) と呼ばれ，$(X, \mathcal{O})$ は $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和空間** (direct sum space) と呼ばれる．この場合，

$$\mathcal{O}=\{U\in\mathcal{P}(X)\mid\forall\lambda(\lambda\in\Lambda\Longrightarrow U\cap X_\lambda\in\mathcal{O}_\lambda)\}$$

となる．

問題 2.28 X を集合とする．また Λ $(\neq\phi)$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ および $\{(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda')\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，さらに写像の集合 $\{f_\lambda: X_\lambda\to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ および位相写像の集合 $\{g_\lambda: Y_\lambda\to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとする．このとき X の位相 $\mathcal{O}$ で $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって co 誘導されるものは，$\{f_\lambda\circ g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって co 誘導される位相 $\mathcal{O}'$ と相等しいことを示せ．——

定理 2.10 とまったく同様につぎの定理が成り立つ (証明も定理 2.10 の場合と同様であるから読者自ら実行されたい)．

定理 2.12 X を集合とする．また Λ, M を集合 $(\Lambda\neq\phi,\ M\neq\phi)$ とし $\Lambda, \Lambda\times M$ を添数集合とする位相空間の集合 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{(X_{(\lambda,\mu)}, \mathcal{O}_{(\lambda,\mu)})\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ および写像の集合 $\{f_\lambda: X_\lambda\to X\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{f_{(\lambda,\mu)}: X_{(\lambda,\mu)}\to X_\lambda\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ が与えられており，X_λ の位相 $\mathcal{O}_\lambda$ は $\{f_{(\lambda,\mu)}\}_{\mu\in M}$ によって co 誘導されるものであるとする．このとき $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって co 誘導される X の位相は $\{f_\lambda\circ f_{(\lambda,\mu)}\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ によって co 誘導される位相と一致する．

§2.9 距離空間の部分空間，直積空間，商空間

位相空間 X が計量化可能であるとき X の部分空間はまた計量化可能となる．より一般に集合 X_0 と距離空間 $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ $(n\in \boldsymbol{N})$ および写像 $f_i: X_0$

$\to X_i$ $(i=1,\cdots,n)$ が与えられ，X_0 から $\prod_{i=1}^{n} X_i$ への写像 F を $F(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ $(x \in X_0)$ によって定めるとき，F が単射になるとしよう．すると，定理1.2と定理2.9からわかるように X_0 の計量 d_0 で $\{f_i\}_{i=1,\cdots,n}$ によって誘導されるものが一意的に存在し，d_0 によって定まる X_0 の位相 $\mathcal{O}_0$ は $\{f_i\}_{i=1,\cdots,n}$ によって誘導される X_0 の位相と一致する．したがって距離空間 X の部分距離空間は X の部分空間に他ならず，また距離空間 $X_1,\cdots,X_n$ の位相 $\mathcal{O}_1,\cdots,\mathcal{O}_n$ を計量 $d_1,\cdots,d_n$ によって定まるものとすれば直積距離空間 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ は $\{(X_i,\mathcal{O}_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ の直積空間に他ならない．

定理2.13　距離空間の列 $\{(X_n,d_n)\}_{n\in N}$ が与えられ，$\mathcal{O}_n$ を d_n によって定まる X_n の位相とする $(n \in \boldsymbol{N})$．このとき $\{(X_n,\mathcal{O}_n)\}_{n\in N}$ の直積空間 $(\prod_{n\in N} X_n, \mathcal{O})$ は計量化可能である．

証明　§1.4で述べたように，任意の距離空間は有界な距離空間と同位相になる．したがって与えられた X_n $(n \in \boldsymbol{N})$ の直径はみな1以下であると仮定してよい．さて，$\prod_{n\in N} X_n$ の任意の元 $x=(x_n)$，$y=(y_n)$ に対して

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n,y_n)^2/2^n\right)^{1/2}$$

とおこう．すると d は $\prod_{n\in N} X_n$ の計量となることが示される．まず d について $d(x,y)\geqq 0$，$d(x,x)=0$，$d(x,y)=d(y,x)$ $(x,y \in \prod_{n\in N} X_n)$ が成り立つことは明らかである．また任意の自然数 N に対して

$$\left(\sum_{n=1}^{N} d_n(x_n,z_n)^2/2^n\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{n=1}^{N} d_n(x_n,y_n)^2/2^n\right)^{1/2}+\left(\sum_{n=1}^{N} d_n(y_n,z_n)^2/2^n\right)^{1/2}$$

$$\left((x_n),\ (y_n),\ (z_n) \in \prod_{n\in N} X_n\right)$$

が成り立つ．(実際 $d_n(x_n,y_n)/2^{n/2}=a_n$，$d_n(y_n,z_n)/2^{n/2}=b_n$ とおくと $d_n(x_n,z_n)/2^{n/2}\leqq a_n+b_n$ であるが，

$$\left(\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{1/2}$$

だから上のことが成り立つ.)　したがって d が三角不等式を満たすこともいえ，$(\prod_{n\in N} X_n, d)$ が距離空間となることがわかった．d によって定まる $\prod_{n\in N} X_n$ の位相 $\mathcal{O}_d$ が，直積位相 $\mathcal{O}$ と一致することを示せば証明が完了する．そのためには X

$=\prod_{n\in N}X_n$ とおき，1_X が $(\mathcal{O}_d, \mathcal{O})$ および $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_d)$ に関して連続写像であることを示せばよい．

1_X が $(\mathcal{O}_d, \mathcal{O})$ に関して連続であることを示すには，X から各 X_k $(k\in \boldsymbol{N})$ への標準的射影 p_k が $(\mathcal{O}_d, \mathcal{O}_k)$ に関して連続であることを証明すればよい．ε を任意の正の実数とし $k\in \boldsymbol{N}$ としよう．$x=(x_n)$，$y=(y_n)$ を

$$d(x, y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n, y_n)^2/2^n\right)^{1/2}<\varepsilon/\sqrt{2}^k$$

を成り立たせるようにとれば，各 $n\in \boldsymbol{N}$ について $d_n(x_n, y_n)^2/2^n<\varepsilon^2/2^k$，ゆえに $d_k(x_k, y_k)<\varepsilon$ となって p_k は $(\mathcal{O}_d, \mathcal{O}_k)$ に関して連続であることがわかる．

1_X が $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_d)$ に関して連続であることを示すために，$x\in X$，$\varepsilon>0$ とし x の ε 近傍 $U_\varepsilon^{(d)}(x)$ をとろう．このとき $\mathcal{O}$ の元 V があって $x\in V$，$V\subset U_\varepsilon^{(d)}(x)$ が成り立つことがいえればよい．仮定により $\operatorname{diam} X_n\leqq 1$ $(n\in \boldsymbol{N})$．また十分に大きな自然数 N をとれば

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/2^n<\varepsilon^2/2$$

が成り立つ．ここで $1\leqq k\leqq N$ のとき $U_k=U_{\varepsilon_k}^{(d_k)}(x_k)$，$\varepsilon_k=\sqrt{2^k\cdot\varepsilon^2/2N}$ とおき $V=U_1\times\cdots\times U_N\times X_{N+1}\times\cdots\times X_n\times\cdots$ とおこう．($V=p_1^{-1}(U_1)\cap p_2^{-1}(U_2)\cap\cdots\cap p_N^{-1}(U_N)$ である．) すると明らかに $x\in V$ だが，さらに $V\subset U_\varepsilon^{(d)}(x)$ が成り立つ．実際 $y\in V$ とすると

$$d(x, y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n, y_n)^2/2^n\right)^{1/2}\leqq\left(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k{}^2/2^k+\sum_{n=N+1}^{\infty}1/2^n\right)^{1/2}$$
$$<\left(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2/2N+\varepsilon^2/2\right)^{1/2}=\varepsilon$$

だからである．▌

上の定理において，特に各 X_λ として閉単位区間 $I=[0, 1]$ をとった場合，直積空間 $\prod_{n\in N}X_n=I^N$ は **Hilbert 立方体** (Hilbert cube) と呼ばれ，距離空間の構造を持つ．

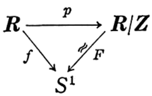
非可算集合 Λ を添数集合とする有界距離空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間は計量化可能だろうか．この問題はつぎの§2.10で扱うことにし，距離空間の商空間についての例をいくつか挙げよう．

例 2.20 1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の元 x, y の間の関係 $x\sim y$ を，$x\sim y \Leftrightarrow x-y$

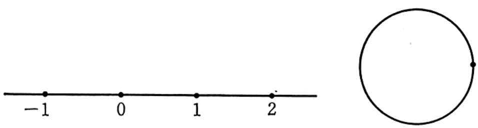
$\in \boldsymbol{Z}$ が成り立つように定めよう．$\sim$ は同値関係となる．商集合 $\boldsymbol{R}/\sim$ を $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と書き，p を $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ への標準的射影としよう．$\mathcal{O}$ を $\boldsymbol{R}$ の Euclid 計量 d から誘導される位相とし，$\mathcal{O}'$ を $\{p\}$ によって定まる $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の商位相とする．定義により

$$\mathcal{O}' = \{U \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}.$$

ここで $S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ (円周) とおき，$\boldsymbol{R}$ から 2 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 S^1 への連続写像 f を $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ によって定めると f は開写像となる (読者自ら確かめられたい)．さらに，f は全射であり $\boldsymbol{R}$ の元 x, y に対して $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ が成り立つ．ゆえに $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の元で実数 x によって代表されるものを (x) と書けば，$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ から S^1 の上への全単射 F が $F((x)) = f(x)$ とおくことによって与えられる．$f = F \circ p$ は連続だから商位相の定



義により F も連続である．F はさらに開写像でもある．実際 $U \in \mathcal{O}'$ のとき $F(U) = f(p^{-1}(U))$ だが $p^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ で f は開写像だから $F(U)$ は S^1 の開集合となる！　したがって F は位相写像となり，$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と S^1 は同位相であること (し



たがって $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は計量化可能であること) がわかる．$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は 1 次元**トーラス** (torus) と呼ばれ $\boldsymbol{T}^1$ とも書かれる．

例 2.21　n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の元 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n)$ の間の関係 $\sim$ を，

$$x \sim y \Leftrightarrow x_i - y_i \in \boldsymbol{Z} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

によって定めよう．$\sim$ は同値関係となる．$\boldsymbol{R}^n/\sim$ を $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ と書き，p を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ への標準的射影とする．$\mathcal{O}$ を Euclid 計量によって定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位

相，$\mathcal{O}'$ を $\{p\}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ の商位相とする．また $\boldsymbol{R}^n$ から直積空間 $\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$ への写像 f を $f((x_1,\cdots,x_n))=((\cos 2\pi x_1, \sin 2\pi x_1),\cdots,(\cos 2\pi x_n, \sin 2\pi x_n))$ によって定め，$\mathcal{O}''$ を $S^1\times\cdots\times S^1$ の直積位相とする．f は $(\mathcal{O},\mathcal{O}'')$ に関して連続かつ開写像であり，$\boldsymbol{R}^n\ni x,y$ に対して $x\sim y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)$ が成り立つ．例 2.20 の場合と同様に写像 $F:\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n\to S^1\times\cdots\times S^1$ を $F\circ p=f$ が成り立つように定めることができる．また F は全単射であり，例 2.20 の場合と同様に $(\mathcal{O}',\mathcal{O}'')$ に関して連続かつ開写像となるので $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ と距離空間 $S^1\times\cdots\times S^1$ とは同位相であることがわかる．$\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ を n 次元トーラスと呼び $\boldsymbol{T}^n$ とも書く．

例 2.22　$\boldsymbol{R}^n$ の元 x,y の間の関係 $\sim$ を $x\sim y \Longleftrightarrow \exists\alpha(\alpha\in\boldsymbol{R}-\{0\}\wedge y=\alpha x)$ によって定め，$\boldsymbol{P}^{n-1}=\boldsymbol{R}^n/\sim$ とおく．$\boldsymbol{P}^{n-1}$ に $\boldsymbol{R}^n$ の商空間の構造を与えたものを $n-1$ 次元（**実**）**射影空間** (projective space) と呼ぶ．$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{P}^{n-1}$ への標準的射影を p とすれば，$p(S^{n-1})=\boldsymbol{P}^{n-1}$ となる．このとき，$\boldsymbol{P}^{n-1}$ の各元の $p|_{S^{n-1}}$ による逆像は 2 個の元から成る．さらに $\boldsymbol{P}^{n-1}$ は T_2 空間となる．

問題 2.29　1 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の元 x,y の間の関係 $\sim$ を，$x\sim y \Longleftrightarrow x-y\in\boldsymbol{Q}$ が成り立つように定めると $\sim$ は同値関係となる．このとき商空間 $\boldsymbol{R}/\sim$ は密着空間となり，計量化不可能であることを示せ．——

上の例 2.20, 2.21 および問題 2.29 からわかるように，距離空間の商空間は距離空間となることも，そうでないこともある．

定理 2.5 に示されたように距離空間は T_4 空間である．その逆は成り立つだろうか．実は計量化不可能な T_4 空間も存在するのだが，このことと関連してつぎの定理をあげておこう (§3.4 参照)．

定理 2.14 (Uryson の計量化定理)　X を位相空間とするとつぎの (i), (ii) は同値である．

(i)　X は T_4 空間で第 2 可算公理を満たす

(ii)　X は可分でしかも計量化可能である．

証明　上に述べたように，距離空間が T_4 空間であることは定理 2.5 で示され，可分な距離空間は第 2 可算公理を満たすことも容易にわかる (問題 2.13 参照) から，(i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つことを示せばよい．またこの場合，X が第 2 可算公理を満たせば，X が可分になることも容易にわかる (問題 2.12) から，第 2 可算

公理を満たす T_4 空間 X が計量化可能であることを示せば十分である．U_1, U_2 を X の開集合で $\bar{U}_1 \subset U_2$ が満たされているとしよう．Uryson の補題によりこのとき連続写像 $f: X \to I = [0, 1]$ で，$f(U_1) = \{0\}$，$f(X - U_2) = \{1\}$ を満たすものが存在する．I は距離空間（$\boldsymbol{R}$ の部分距離空間）だが，この場合 f は単射になるとは限らないし，f が X から $f(X)$ の上への位相写像となるとも限らないのでこれから直ちに X が計量化可能であるというわけにはいかない．ところが X の可算開基 $\mathcal{O}_0$ をとり

$$\mathcal{P} = \{(U_1, U_2) \in \mathcal{O}_0 \times \mathcal{O}_0 \mid \bar{U}_1 \subset U_2\}$$

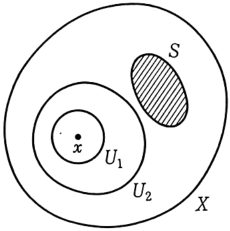
とおくと，$\mathcal{P}$ はまた可算集合になる．また X の任意の元 x に対して U を $\mathcal{O}_0$ の元で $x \in U$ となるものとすると，（$\{x\}$ は閉集合なので）$\mathcal{O}_0$ の元 U' で $x \in U'$，$\bar{U}' \subset U$ となるものが存在する（§2.7 の初めの部分参照）．

$\mathcal{P}$ の任意の元 (U_1, U_2) に対して X から I への連続写像 $f = f_{(U_1, U_2)}$ を $f(\bar{U}_1) = \{0\}$，$f(X - U_2) = \{1\}$ となるように選ぶことができる．いまそのようにして選ばれた連続写像 $f_{(U_1, U_2)}$ 全体から成る集合を $\mathcal{F}$ と書こう．$\mathcal{F}$ は明らかに可算集合である．さて X から直積空間 $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ $(I_f = I)$ への写像 F を，$F(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$ によって定めると F は連続，しかも $F(X)$ を $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ の部分空間と考えると $F: X \to F(X)$ は位相写像となることが示される．ところが，直積空間 $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ は距離空間となり，その部分空間はまた計量化可能だから，このことから X も計量化可能であることがいえるのである．さて，F が X から $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ への連続写像であることは，各 f $(\in \mathcal{F})$ が X から $I_f = I$ への連続写像であることからわかる．$F: X \to F(X)$ が位相写像となることを示すためには F が単射であり，かつ開写像であることをいえばよい．そのために，まずつぎの命題 (*) が成り立つことを示そう．

(*)　$x \in X$, $S \subset X$, S は閉集合で $x \notin S$ とすると，$\mathcal{F}$ の元 f で $f(x) = 0$, $f(S) = \{1\}$ となるものが存在する．

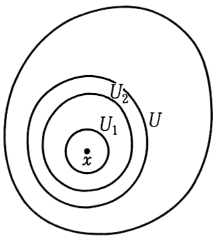
実際，上の場合 $\mathcal{P}$ の元 (U_1, U_2) を適当に選べば $x \in U_1$，$S \subset X - U_2$ となるようにできるから (*) が成り立つ．

(*) を用いて，まず F が単射であることを示そう．x, y を X に含まれる元で，$x \neq y$ とすると X は T_4 空間だから特に T_1 空間でもあり，$\{x\}$, $\{y\}$ はともに閉集合，$x \notin \{y\}$ だから (*) より $\mathcal{F}$ の元 f で $f(x) = 0$，$f(y) = 1$ となるものがある．



ゆえにこのとき $F(x)\neq F(y)$ となり，F が単射であることがわかる．

最後に $(*)$ から F が開写像となることを導こう．U を X の開集合とし $F(U)$ が $F(X)$ の開集合となることを示す．$U=\phi$ のときには $F(U)=\phi$ となり問題はないから $U\neq\phi$ の場合について考え，x を U に含まれる任意の元とする．ここで再び $\mathcal{P}$ の元 (U_1, U_2) を $x\in U_1$，$\bar{U}_2\subset U$ となるように選び，$\mathcal{F}$ の元 f_0 を $f_0(\bar{U}_1)=\{0\}$，$f_0(X-U_2)=\{1\}$ となるように選ぶ．このとき $f_0(X-U)=\{1\}$ となる．ゆえに $f_0(x)=0\in[0,1)$ だが，$[0,1)$ は I の開集合であるから $V=\pi_{f_0}{}^{-1}([0,1))$



は $\prod_{f\in\mathcal{F}} I_f$ の開集合であり，$F(x)\in V$ となる（π_{f_0} は標準的射影である）．ここで，$V\cap F(X)$ は $F(X)$ の開集合だから $V\cap F(X)\subset F(U)$ が成り立つことが示されれば，x は U に含まれる任意の元だったから $F(U)$ が $F(X)$ の開集合となることがわかる．さて，$V\cap F(X)$ に含まれる任意の元を $F(y)$ $(y\in X)$ としよう．$F(y)\in V$ より $f_0(y)\in[0,1)$，ゆえに $y\in U$（$y\in X-U$ ならば $f_0(y)=1$ だから！），したがって $V\cap F(X)\subset F(U)$ である！ ▌

§2.10 位相空間の部分空間，直積空間，商空間

前節では距離空間の部分空間，直積空間，商空間についてそれらがまた距離空間となるかどうかについて見た．本節では同様のことをこれまでに見て来たいろいろのタイプの位相空間について調べてみよう．

まず X を離散空間とすると，X の部分空間および商空間はまた離散空間である．Λ を添数集合とする離散空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($X_\lambda\neq\phi$) が与えられたとき，直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は Λ が有限集合であり，またそのときに限って離散空間となる．(これらのことについては読者自ら確かめられたい.)

問題 2.30 密着空間の部分空間および商空間は密着空間となること，また Λ を添数集合とする密着空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間も密着空間となることを示せ．——

例 2.23 群 G とその部分群 H が与えられたとき，包含写像 $\iota: H\to G$ は Krull 空間 (H, Cl_H) から Krull 空間 (G, Cl_G) への連続写像となる (例 2.4)．ゆえに，$\mathcal{O}_H$ を Cl_H によって定まる H の位相とすれば，$\mathcal{O}_H$ は $\{\iota\}$ によって誘導される H の相対位相 $\mathcal{O}_H'$ よりも強い．また一般に $\mathcal{O}_H=\mathcal{O}_H'$ とはならない．たとえば G を有理数体の加法群 $\boldsymbol{Q}^+$, $H=\boldsymbol{Z}^+$ とすれば，$\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}^+}'$ は密着位相である (問題 2.2 (ii)) が，$\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}^+}$ は密着位相ではない．一方，N を G の正規部分群とすれば商群 G/N の商空間としての位相は G/N の Krull 位相と一致する．また有限個の群 $G_1, \cdots, G_n$ の直積群 $G=\prod_{i=1}^{n} G_i$ の Krull 位相は Krull 空間 $G_1, \cdots, G_n$ の直積位相と相等しい ([ヒント] $G=G_1\times G_2$, N を G の指数有限正規部分群とし，$G_1'=\{(x, e_2)\in G\mid x\in G_1\}$，$G_2'=\{(e_1, y)\in G\mid y\in G_2\}$ (e_i は G_i の単位元) とする．このとき $[G_1' : G_1'\cap N]=[G_1'N : N]\leqq[G : N]$，同様に $[G_2' : G_2'\cap N]\leqq[G : N]$ となり，このことを用いると G の Krull 位相は G_1, G_2 の直積位相と相等しいことが示される)．——

X を第1 (または第2) 可算公理を満たす位相空間とすれば，X の部分空間も第1 (または第2) 可算公理を満たす．また $X_1, \cdots, X_n$ ($n\in\boldsymbol{N}$) を第1 (または第2) 可算公理を満たす位相空間とすれば，直積空間 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ も第1 (または第2) 可算公理を満たすことは容易に確かめられる．さらにつぎの定理が成り立つ．

定理 2.15 Λ を添数集合 ($\Lambda\neq\phi$) とする位相空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，各 X_λ は第1 (または第2) 可算公理を満たすとする．$\Lambda'=\{\lambda\in\Lambda\mid X_\lambda$ は密着空間

とは異なる$\}$とおく．このとき，直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が第1（または第2）可算公理を満たすための必要十分条件は Λ' が可算集合となることである．

証明 Λ' が空ではない可算集合であるとし，まず各 X_λ が第1可算公理を満たす場合について考えよう（$\Lambda'=\phi$ なら $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は密着空間だから問題はない）．$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の元 $x=(x_\lambda)$ が与えられたとき，可算濃度を持つ x の基本近傍系 $\mathfrak{N}_0(x)$ が存在することを示せばよい．$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ から X_λ への標準的射影を p_λ とし，$\mathfrak{N}_{0,\lambda}(x_\lambda)$ を x_λ の可算基本近傍系としよう．いま U を x を含む $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の開集合とすると，$\Lambda-\Lambda'$ の任意の元 λ に対して $p_\lambda(U)=X_\lambda$，また有限個の Λ' の元を除く Λ' の元 λ' に対しても $p_{\lambda'}(U)=X_{\lambda'}$ となる．さて，自然数 n に対して，n 個の元から成る Λ' の部分集合 Λ'' が与えられたとしよう（$n\leqq|\Lambda'|$）．Λ'' の各元 λ'' に対して $\mathfrak{N}_{0,\lambda''}(x_{\lambda''})$ の元 $U_{\lambda''}$ を選び，$V=\bigcap_{\lambda''\in\Lambda''} p_{\lambda''}{}^{-1}(U_{\lambda''})$ とおけば，V は x の近傍で，Λ'' に含まれる n 個の元以外の Λ の元 λ に対しては $p_\lambda(V)=X_\lambda$ となる．このような V を x の‘n 型’の近傍と呼ぶことにする．x の n 型の近傍全体から成る集合を $\mathcal{V}_n(x)$ と表わすと，Λ' が可算集合であり，各 $\mathfrak{N}_{0,\lambda''}(x_{\lambda''})$ $(\lambda''\in\Lambda'')$ も可算集合だから $\mathcal{V}_n(x)$ も可算集合となる．もしも $n>|\Lambda'|$ ならば $\mathcal{V}_n(x)=\phi$ とおき，$\mathfrak{N}_0(x)=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\mathcal{V}_n(x)$ とおけば $\mathfrak{N}_0(x)$ は可算集合で，容易にわかるように x の基本近傍系となる．こうして Λ' が可算集合ならば $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が第1可算公理を満たすことが示された．まったく同様の議論によって，各 X_λ が第2可算公理を満たし Λ' が可算集合であれば $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も第2可算公理を満たすことが示される．

つぎに Λ' を非可算集合であるとし，各 X_λ が第1可算公理を満たす場合について考えよう．$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が第1可算公理を満たすとして矛盾を導くことにする．$x=(x_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の可算基本近傍系を $\mathfrak{N}_0(x)$ とし，その元を $V_0, V_1, V_2, \cdots$ としよう．各 V_n に対して $\{\lambda\in\Lambda\,|\,p_\lambda(V_n)\neq X_\lambda\}=\Lambda_n$ とおくと，$\Lambda_n\subset\Lambda'$ しかも Λ_n は有限集合だから，$\bigcup_{n\in\overline{\boldsymbol{N}}}\Lambda_n$ は Λ' の可算部分集合である．Λ' が非可算であるという仮定により $\Lambda'-\bigcup_{n\in\overline{\boldsymbol{N}}}\Lambda_n$ に含まれる元 λ が存在する．X_λ は密着空間ではないから，x_λ の近傍 U_λ で X_λ とは異なるものが存在する．$V=p_\lambda{}^{-1}(U_\lambda)$ は x の近傍となるが，$\mathfrak{N}_0(x)$ のどの元 V_n をとっても $p_\lambda(V_n)=X_\lambda$ となるので，$V_n\not\subset V$ となり，$\mathfrak{N}_0(x)$ が x の基本近傍系であるという仮定と矛盾する！ 各 X_λ が第2可算公理を満たす場合にもまったく同様の論法で定理が証明される．▌

系 非可算集合 Λ を添数集合とする距離空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，各

X_λ が2個またはそれ以上の元を持つならば，直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は計量化可能でない.

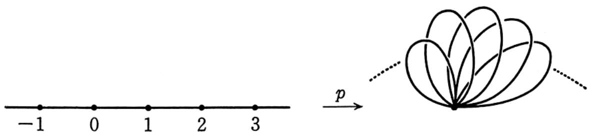
証明　距離空間は第1可算公理を満たす．また距離空間が少なくとも2個の元を含めば，それは密着空間ではない．したがって系は定理2.15から直ちに導かれる. ▌

第1(または第2)可算公理を満たす位相空間の商空間は必ずしも第1(または第2)可算公理を満たさないことが，つぎに示す例によって明らかにされる.

例 2.24　1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の元 x, y の間の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff (x \in \boldsymbol{Z} \wedge y \in \boldsymbol{Z}) \vee (x \in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Z} \wedge x=y)$$

が成り立つように定めると，$\sim$ は同値関係となる．p を $\boldsymbol{R}$ から商空間 $\boldsymbol{R}/\!\sim$ へ



の標準的射影とする．$\boldsymbol{R}/\!\sim$ の部分集合 V は $p^{-1}(V)$ が $\boldsymbol{R}$ の開集合となるとき，またそのときに限って $\boldsymbol{R}/\!\sim$ の開集合となる．特に U を $\boldsymbol{R}$ の開集合で整数をすべて含むものとすれば $p(U)$ は $p(0)$ の開近傍となる．ところで，$p(0)$ は可算基本近傍系を持たない．実際 $p(0)$ の可算基本近傍系 $\mathfrak{N}_0=\{V_n\}_{n\in A}$ があったとしよう．添数集合 A は可算集合だから，$\boldsymbol{Z}$ の部分集合と同一視することができる．ここで各 $n\in A$ $(\subset\boldsymbol{Z})$ に対して n の近傍 U_n を $U_n \subsetneqq p^{-1}(V_n)\cap(n-1/3, n+1/3)$ となるように選ぶことができる．$\boldsymbol{Z}-A$ に含まれる m があれば $U_m=(m-1/3, m+1/3)$ とおく．$U=\bigcup_{n\in\boldsymbol{Z}} U_n$ とおけば U は $\boldsymbol{R}$ の開集合で，$p(U)$ は $p(0)$ の開近傍となり，しかも A の任意の元 n に対して $p(U)\subsetneqq V_n$，ゆえに $\mathfrak{N}_0$ が $p(0)$ の基本近傍系であるという仮定に矛盾する！　こうして $\boldsymbol{R}/\!\sim$ は第1可算公理を満たさないこと，したがって第2可算公理をも満たさないことが示された．$\boldsymbol{R}/\!\sim$ は，したがって，計量化可能でもない.

問題 2.31　上の例で $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}/\!\sim$ への標準的射影 p は連続な閉写像であること，また p は開写像ではないことを示せ．——

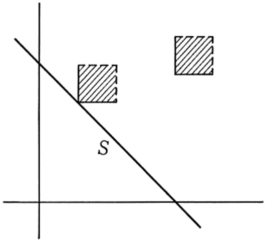
可分な位相空間は第1(または第2)可算公理を満たす位相空間とはかなり異な

った振舞いをする．まず，可分位相空間の部分空間は可分となるとは限らない(例2.25参照)．

例 2.25 $X=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ とし X の各元 $x=(x_1, x_2)$ に対して

$$\mathfrak{N}_0(x)=\{U\in\mathcal{P}(X)\mid\exists\varepsilon(\varepsilon>0\wedge U=[x_1, x_1+\varepsilon)\times[x_2, x_2+\varepsilon))\}$$

とおけば $\mathfrak{N}_0(x)$ $(x\in X)$ は x の基本近傍系の公理を満たし，X の位相が定まる．



$Y=\{x\in X\mid\exists x_1\exists x_2(x_1, x_2\in\boldsymbol{Q}\wedge x=(x_1, x_2))\}$ とすると Y は X の到る所で稠密であるから，X は可分である．ところが，$S=\{x\in X\mid x=(x_1, x_2)\wedge x_1+x_2=1\}$ とおくと，X の部分空間 S は非可算の離散空間となり可分ではない．また X は第2可算公理を満たさない(もし X が第2可算公理を満たせば，その部分集合である S も第2可算公理を満たす筈だが，いまの場合，明らかに S は第2可算公理を満たさないからである)．こうして，X は可分ではあるが第2可算公理を満たさない位相空間の例ともなっている(問題2.12参照)．さらに X は計量化不可能である(X を距離空間とすると X が可分であることと，X が第2可算公理を満たすことは同値だからである)．——

有限個の可分位相空間の直積空間は明らかに可分であるが，無限個の可分位相空間の直積空間は可分になることも，ならないこともある(例2.26, 2.27参照)．

例 2.26 $I=[0,1]$ を閉単位区間とし，普通のように1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ の部分空間とみなし，$X=I^I$ を直積空間とする．X は可分である．このことを示すために，x を I^I の任意の元とし，U_x をその近傍とするとき U_x がどのような集合になるかについて考えよう．まず $x\in I^I$ だから I の任意の元 α に対して $x(\alpha)\in I$．直積位相の定義より I^I の元 y に対して $U_x\ni y$ となるための必要十分条件は，有限個の I の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ および $x(\alpha_1), \cdots, x(\alpha_n)$ の I における近傍

$V_1, \cdots, V_n$ が存在して $y(\alpha_1) \in V_1, \cdots, y(\alpha_n) \in V_n$ となることである．すなわち I^I の元 y が x に‘近い’とは，I の有限個の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ があってそこでの‘y の値’$y(\alpha_1), \cdots, y(\alpha_n)$ が‘x の値’$x(\alpha_1), \cdots, x(\alpha_n)$ と‘近い’ということになる．ここで I の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，その個数，また近傍 $V_1, \cdots, V_n$ は x の近傍 U_x のとり方に応じて変るが，どのような近傍をとっても上のような有限個の元と近傍がとれるのである．ここで X の元としてつぎのような‘階段関数’を考えよう．$m \in \boldsymbol{N}$，$\alpha_i \in I$ $(i=1, \cdots, 2^m)$ に対し X の元 $x_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}}{}^{(m)}$ を，

$$x_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}}{}^{(m)}(\alpha) = \begin{cases} \alpha_i & (\text{ただし } \alpha \in [(i-1)/2^m, i/2^m) \ (i=1, \cdots, 2^m)) \\ \alpha_{2m} & (\text{ただし } \alpha=1) \end{cases}$$

とおいて定め

$$S^{(m)} = \{x \in X \mid \exists \alpha_i(\alpha_i \in I \cap \boldsymbol{Q} \ (i=1, \cdots, 2^m) \wedge x = x_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}}{}^{(m)})\}$$

$$S = \bigcup_{m \in \boldsymbol{N}} S^{(m)}$$

とおく．$|S^{(m)}| = \aleph_0{}^{2m} = \aleph_0$，$\aleph_0 \leqq |S| \leqq \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ だから $|S| = \aleph_0$．さて S は X の到る所で稠密である．実際 X の任意の元 x とその近傍 U_x をとり

$$U_x \ni y \iff y(\alpha_i) \in V_i \qquad (i=1, \cdots, n;\ \alpha_i \in I,\ V_i \text{ は } \alpha_i \text{ の近傍})$$

が成り立つとしよう．また $|\alpha_i - \alpha_j|$ $(i \neq j)$ の最小値を α_0 とする．自然数 m を十分大きくとって $1/2^m < \alpha_0$ が成り立つようにする．すると $\boldsymbol{Q} \cap I$ が I の中の到る所で稠密であることから，容易に確かめられるように U_x に属する $S^{(m)}$ の元が存在する．したがって $\bar{S} = X$ となり X が可分であることが示された．

例 2.27　$A = 2^{\boldsymbol{R}}$ とし，$X = 2^A$ とする．ここで $2 = \{0, 1\}$ は離散空間とみなす．X は $2^{\boldsymbol{R}}$ 個の可分位相空間の直積空間であり，容易にわかるように T_2 空間となるが，可分ではない．X の可算部分集合 S で，$\bar{S} = X$ となるものがあったと仮定して矛盾を導こう．実際このとき X の各元 x に対して $\mathcal{B}_x = \{T \in \mathcal{P}(S) \mid \exists U (U \in \mathfrak{U}(x) \wedge T = U \cap S\}$ とおくと $\mathcal{B}_x$ は S のフィルター基になり $x \neq y$ なら $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$. S のフィルター全体から成る集合は $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ の部分集合であるから容易にわかるように $|X| \leqq 2^{2^{|S|}} \leqq |2^{\boldsymbol{R}}|$ となり，$X = 2^{2^{\boldsymbol{R}}}$ という仮定と矛盾する！

上の議論からもわかるように，集合 A を $|A| \geqq |2^{\boldsymbol{R}}|$ のようにとれば 2^A は可分ではなくなる (Bourbaki“位相 I”第1章 §8 演習6による．この例は木下素夫氏に教えて頂いた)．——

可分位相空間の商空間は明らかにまた可分である．

上で行なった考察を§2.6で述べたいろいろな分離公理を満たす空間についても実行してみよう．

T_0, T_1, T_2 空間の部分空間がそれぞれまた T_0, T_1, T_2 空間となることは明らかである．これらの空間の直積空間，商空間がそれぞれ T_0, T_1, T_2 空間となるかどうかについても容易にわかる(問題2.32, 2.33参照)．

問題 2.32　$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\Lambda\,(\neq\phi)$ を添数集合とする T_0 (T_1 または T_2) 空間の集合とするとき，直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は T_0 (T_1 または T_2) 空間となることを示せ．

問題 2.33　T_0 (T_1, T_2, T_3 または T_4) 空間の商空間は必ずしも T_0 (T_1, T_2, T_3 または T_4) 空間とはならないことを示せ(問題2.29参照)．——

つぎに T_2 空間の特徴づけを与える定理をあげておこう．

定理 2.16　X を位相空間，$\Delta=\{\xi\in X\times X\,|\,\exists x(x\in X\wedge\xi=(x,x))\}$ ($X\times X$ の対角線集合)とすると，X が T_2 空間となるためには Δ が直積空間 $X\times X$ の閉集合となることが必要十分である．

証明　X が T_2 空間であるとして，$X\times X-\Delta$ が開集合であることを示そう．$(x,y)\in X\times X-\Delta$ とすると $x\neq y$ だから X の開集合 U, V で $x\in U$, $y\in V$，しかも $U\cap V=\phi$ となるものがある．$U\times V$ は $X\times X$ の開集合で (x,y) を含み，しかも $X\times X-\Delta$ の部分集合となる．ゆえに $X\times X-\Delta$ は開集合，したがって Δ は閉集合である．

逆に Δ が $X\times X$ の閉集合であれば，X の元 x, y $(x\neq y)$ が与えられたとき $(x, y)\in X\times X-\Delta$，したがって X の開集合 U, V で $x\in U$, $y\in V$，しかも $U\times V\subset X\times X-\Delta$ となるものが存在する．$U\times V\subset X\times X-\Delta\Longrightarrow U\cap V=\phi$ となるから x, y は X の開集合 U, V によって分離される．▌

系　f, g を位相空間 X から T_2 空間 Y への連続写像とすると $S=\{x\in X\,|\,f(x)=g(x)\}$ は X の閉集合である．

証明　d を，X の元 x を $X\times X$ の元 (x,x) へ写す写像，$f\times g$ を，$X\times X$ の元 (x,y) を $Y\times Y$ の元 $(f(x), g(y))$ へ写す写像としよう．d, $f\times g$ はともに連続写像だから

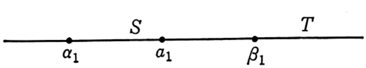
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{d} & X\times X & \xrightarrow{f\times g} & Y\times Y. \\ \cup & & & & \cup \\ S & & & & \varDelta \end{array}$$

それらの合成写像 $F=(f\times g)\circ d$ は X から $Y\times Y$ への連続写像である．$\varDelta$ を $Y\times Y$ の対角線集合とすると明らかに $S=F^{-1}(\varDelta)$ だが，上の定理により $\varDelta$ は閉集合だから S も閉集合である．▌

X が正則空間であるとき X の部分空間はまた正則となる．このことは正則空間を特徴づける定理 2.4 を用いれば直ちにわかるから読者自ら確かめられたい．また同様に定理 2.4 から正則空間の集合の直積空間も正則となることがわかる．正則空間の商空間は必ずしも正則ではない (問題 2.29 参照)．

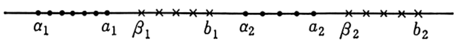
正規空間の部分空間，また正規空間の集合の直積空間は正規空間となるとは限らない．このことを証明するためには第3章で述べるコンパクト空間の概念を用いると便利なので，ここでは特殊な正規空間の例を示し，後 (例 3.6, 3.7) でそれを用いて上のことを示すことにしよう．また正規空間の商空間は必ずしも正規ではない (問題 2.29 参照)．

例 2.28　$\aleph_1$ を '2番目に大きい無限基数' とする．$\aleph_1$ は非可算の順序数の中の '最小' のものである (第I部第6章参照．$\aleph_1=2^{\aleph_0}$ とするのが連続体仮説である!)．$\aleph_1$ は順序数だから整列集合となり順序位相に関して位相空間となる．$\aleph_1$ の元の間の順序関係を $<$ と表わそう．($\aleph_1$ の元 α, β に対して $\alpha\lneqq\beta \Leftrightarrow \alpha\subsetneqq\beta \Leftrightarrow \alpha\in\beta$ となる.)　$\aleph_1$ は正規空間となる．実際 S, T を $\aleph_1$ の閉集合とし，$S\cap T=\phi$ ならば $\aleph_1$ の開集合 U, V をとって $U\supset S$, $V\supset T$，しかも $U\cap V=\phi$ を成り立たせることができることを示そう．S, T の中いずれかが空集合ならば問題はないから S も T も空集合とは異なる場合を考えよう．$\alpha_1=\min S\cup T$ とし $\alpha_1\in S$ と仮定する ($\alpha_1\in T$ の場合も同様にできる)．$\beta_1=\min T$ とすれば $\alpha_1\lneqq\beta_1$．ここで $a_1=\sup\{\xi\in\aleph_1\mid\xi\in S\wedge\xi\lneqq\beta_1\}$ とおけば $a_1\in\bar{S}=S$．もしも $a_1=\max S$ ならば



$U=s(a_1^+)$ $(=\{\xi\in\aleph_1\mid\xi\lneqq a_1^+\})$，$V=s'(a_1)$ $(=\{\xi\in\aleph_1\mid\xi\gneqq a_1\})$ とおけば条件が満たされる．$a_1\neq\max S$ のときには $\alpha_2=\min\{\xi\in S\mid\xi\gneqq a_1\}$，$b_1=\sup\{\xi\in\aleph_1\mid$

$\xi \in T \wedge \xi \lneqq \alpha_2\}$ とおけば $\beta_1 < b_1 \in \bar{T} = T$, $b_1 \lneqq \alpha_2$ となる．以下同様にして β_2, a_2; α_3, b_2; $\beta_3, a_3, \cdots$ を定めて順序数の列 $a_1, a_2, \cdots$; $b_1, b_2, \cdots$ を得る．ここで $a_n \lneqq b_n$



$\lneqq a_{n+1}$, $a_n \in S$, $b_n \in T$ である．もしもこれらの列が無限列ならば，容易にわかるように $\sup\{a_n\}_{n\in\omega} = \sup\{b_n\}_{n\in\omega}$．ここで $\sup\{a_n\}_{n\in\omega} = c$ とおくと $c \subset \bigcup_{n\in\omega} a_n$．ところが各 a_n は可算順序数だから $\bigcup_{n\in\omega} a_n$ は可算集合(第I部§6.4参照)，したがって $c \in \aleph_1$ となり，さらに $c \in \bar{S} \cap \bar{T} = S \cap T$ となって $S \cap T = \phi$ に矛盾する．したがって，或る $n \in \omega$ をとれば $a_n = \max S$ あるいは $b_n = \max T$ が成り立つ．このような n より小さい自然数 k に対して $(a_k, b_k] = \{\xi \in \aleph_1 \mid a_k \lneqq \xi < b_k\}$ とおくと，$(a_k, b_k] = s'(a_k) \cap s(b_k{}^+)$ だから $(a_k, b_k]$ は開集合であり，また $(a_k, b_k]^c = s(a_k{}^+) \cup s'(b_k)$ だから，$(a_k, b_k]$ は閉集合ともなる．ここで

$$V = \begin{cases} (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_{n-1}, b_{n-1}] \cup s'(a_n) & (a_n = \max S) \\ \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] & (b_n = \max T) \end{cases}$$

とおけば明らかに V は T を部分集合として含む開集合となる．また V は閉集合ともなるので $(s'(a_n)^c = s(a_n{}^+)$ である)，$U = V^c$ とおけば U は S を部分集合として含む開集合でしかも $U \cap V = \phi$ となる！　こうして $\aleph_1$ が正規空間であることが示された．——

上の例の中で用いられ，後にもまた使われる命題を書き出しておこう．

補題 2.1 (Interlacing Lemma)　$\aleph_1$ の元の列 $(\alpha_n)_{n\in\omega}$, $(\beta_n)_{n\in\omega}$ が与えられ，$\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ $(n \in \omega)$ が成り立つとすれば，$\sup\{\alpha_n\}_{n\in\omega} = \sup\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ となる．また $\sup\{\alpha_n\}_{n\in\omega} \in \aleph_1$ である．

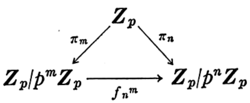
問題 2.34　上の補題を証明せよ．また上の例で用いられた方法と同様の方法を用いて順序数 $\aleph_1$ の後継者 $\aleph_1{}^+ = \aleph_1 \cup \{\aleph_1\}$ も順序位相に関して正規空間となることを示せ．——

一般に順序数 α を順序位相を持つ位相空間とみなすとき，α は T_2 空間となる．実際 ξ, η を α の元，$\xi \lneqq \eta$ とすれば $\xi \lneqq \xi^+ < \eta$ となり $\xi \in s(\xi^+)$, $\eta \in s'(\xi)$, $s(\xi^+) \cap s'(\xi) = \phi$ となる．したがって上の例の空間 $\aleph_1$ は T_4 空間となる．また

$\aleph_1{}^+$ も T_4 空間となることが容易にわかる.

§2.11　射影的極限, 帰納的極限

§1.9で p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ の性質について述べ, $\boldsymbol{Q}_p$ が完備な距離空間としての位相を持つことを示した. さらに例2.8では $\boldsymbol{Z}_p=\{\tilde{a}\in\boldsymbol{Q}_p \mid \tilde{v}_p(\tilde{a})\leqq 1\}$ ($\tilde{v}_p$ は $\boldsymbol{Q}_p$ の p 進付値) が $\boldsymbol{Q}_p$ の部分環となり $\boldsymbol{Q}_p$ の'p 進整数環' と呼ばれることを述べた. $\boldsymbol{Z}_p$ は $\boldsymbol{Q}_p$ の部分空間としての位相——それを'$\boldsymbol{Z}_p$ の p 進位相' と呼ぼう——を持つ. いま0より大きい自然数 n に対して $\boldsymbol{Z}_p$ の部分環 $p^n\boldsymbol{Z}_p$ を考えよう. 商空間 $\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ は p^n 個の元から成る離散空間となり, $\boldsymbol{Z}_p$ から $\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ の上への標準的射影 π_n は連続となる. $n\leqq m$ $(n, m\in\boldsymbol{N})$ のとき $p^m\boldsymbol{Z}_p\subset p^n\boldsymbol{Z}_p$ だから写像 $f_n{}^m:\boldsymbol{Z}_p/p^m\boldsymbol{Z}_p\to\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ で $f_n{}^m\circ\pi_m=\pi_n$ を満たすものがある. さらにこのとき $f_n{}^n=1$



(恒等写像), $n\leqq m\leqq k$ のとき $f_n{}^m\circ f_m{}^k=f_n{}^k$ がそれぞれ成り立つ. こうして p 進整数環の空間 $\boldsymbol{Z}_p$ に対応してそれぞれが p べき個の元から成る無数の離散空間とそれらの間に糸を張りめぐらす写像たちが得られた. いま $\{\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ の直積空間 $\tilde{X}=\prod_{n\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ を考え ϖ_n を $\tilde{X}$ から $\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ の上への標準的射影とする. ここで

$$X=\{(x_n)\in\prod_{n\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p \mid \forall n\forall m(n, m\in\boldsymbol{N}\wedge n\leqq m\Longrightarrow f_n{}^m(x_m)=x_n)\}$$

とおこう. X は $\prod_{n\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ の部分空間である. 標準的射影 ϖ_n の X への制限を $\varpi_n{}'$ で表わせば, $n\leqq m$ $(n, m\in\bar{\boldsymbol{N}})$ のとき $f_n{}^m\circ\varpi_m{}'=\varpi_n{}'$ となる. $\boldsymbol{Z}_p$ の任意の元 $\tilde{a}$ に対し $\tilde{X}$ の元 $f(\tilde{a})=(\pi_n(\tilde{a}))$ を対応させると $f(\tilde{a})$ は明らかに X の元となる. 逆に $(x_n)\in X$ とし x_n が $\boldsymbol{Z}_p$ の元 $\tilde{a}_n=a_0+a_1p+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}$ $(0\leqq a_i<p)$ で代表されるとしよう. 上のような $\tilde{a}_n$ は x_n に対して一意的に定まり, $n\leqq m$ のとき $\tilde{a}_m=b_0+b_1p+\cdots+b_{m-1}p^{m-1}$ $(0\leqq b_i<p)$ とおくと $a_0=b_0, \cdots, a_{n-1}=b_{n-1}$ が成り立つ. ゆえに $(\tilde{a}_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{Z}_p$ の元 $\tilde{a}$ に収束し $f(\tilde{a})=(x_n)$ となる！　こうして $\boldsymbol{Z}_p$ と X とは f を通して, 集合として'同一視' され得る. さらに f は $\boldsymbol{Z}_p$ から X の上への位相写像となることも容易に確かめられる. こうして, $\boldsymbol{Z}$ と比べてややむ

ずかしい対象とも思われる $\boldsymbol{Z}_p$ が，位相空間としては $\boldsymbol{Z}_p/p^n\boldsymbol{Z}_p$ $(n \in \boldsymbol{N})$ たちを'じゅずつなぎ'にしたような空間と同一視できることがわかった．より一般に，以下に述べるような'位相空間の射影的極限'という概念が得られる．

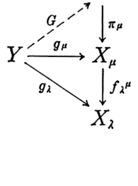
$(\Lambda, \prec)$ を順序集合 $(\Lambda \neq \phi)$，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ を添数集合とする位相空間の集合とする．さらに Λ の元 λ, μ に対して $\lambda \prec \mu$ ならば連続写像 $f_\lambda{}^\mu : X_\mu \to X_\lambda$ が与えられ $f_\lambda{}^\lambda = 1_{X_\lambda}$，また $\lambda \prec \mu \prec \nu$ ならば $f_\lambda{}^\mu \circ f_\mu{}^\nu = f_\lambda{}^\nu$ が成り立っているとする．$\mathscr{F}$ を上のような連続写像 $f_\lambda{}^\mu$ 全体の集合としよう．(厳密には $M = \{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda \mid \lambda \prec \mu\}$ とするとき $\mathscr{F}$ は M を添数集合とする集合 $\{f_\lambda{}^\mu\}_{(\lambda,\mu) \in M}$ となる.) $(\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \mathscr{F})$ を $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**射影系** (projective system) という．ここで直積空間 $\tilde{X} = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を考え，その部分空間 X を

$$X = \{(x_\lambda) \in \tilde{X} \mid \forall\lambda\forall\mu(\lambda, \mu \in \Lambda \wedge \lambda \prec \mu \Longrightarrow f_\lambda{}^\mu(x_\mu) = x_\lambda)\}$$

とおいて定め，X を射影系 $(\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \mathscr{F})$ の**射影的極限** (projective limit) と呼んで $X = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathscr{F})$ または $X = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と書く．$\tilde{X}$ から X_λ への標準的射影の X への制限を π_λ と書きこれを**標準的写像** (canonical mapping) と呼ぶ．π_λ は連続写像であり $\lambda \prec \mu$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ のとき $f_\lambda{}^\mu \circ \pi_\mu = \pi_\lambda$ となる．とくに各 X_λ が Hausdorff 空間であれば直積空間 $\tilde{X} = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ も Hausdorff 空間となり，さらに $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は $\tilde{X}$ の閉集合となる (問題 2.32，定理 2.16 の系参照)．

定理 2.17 位相空間の射影系 $(\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \mathscr{F})$ と位相空間 Y，連続写像 $g_\lambda : Y \to X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が与えられ，$\lambda \prec \mu$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ ならば $f_\lambda{}^\mu \circ g_\mu = g_\lambda$ $(f_\lambda{}^\mu \in \mathscr{F})$ が満たされるとする．このとき連続写像 $G : Y \to X = \varprojlim X_\lambda$ が一意的に存在し，Λ の任意の元 λ に対して $g_\lambda = \pi_\lambda \circ G$ が成り立つ．

証明 Y の元 y に対し直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の元 $(g_\lambda(y))$ を対応させ $G(y) = (g_\lambda(y))$ と書くと $G(y) \in X$，$g_\lambda = \pi_\lambda \circ G$ が成り立つ．また U_λ を X_λ の開集合 $U = \pi_\lambda{}^{-1}(U_\lambda)$ とすれば $G^{-1}(U) = G^{-1} \circ \pi_\lambda{}^{-1}(U_\lambda) = g_\lambda{}^{-1}(U_\lambda)$ となり，$g_\lambda{}^{-1}(U_\lambda)$ は Y の開集合と



なる．ところが，$\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ という形の集合全体は X の位相の部分基を成すから G は連続である．G の一意性は $g_\lambda=\pi_\lambda\circ G$ $(\lambda\in\Lambda)$ より明らかである．▌

問題 2.35 p を素数，C_{p^n} を p^n 次巡回群とし C_{p^n} を離散空間とみなす $(n\in \boldsymbol{N})$．$n\leqq m$ $(n, m\in \boldsymbol{N})$ のとき写像 $f_n{}^m: C_{p^m}\to C_{p^n}$ を $f_n{}^m(x)=x^{p^{m-n}}$ $(x\in C_{p^m})$ によって定める．$\mathscr{F}$ を $f_n{}^m$ $(n\leqq m,\ n, m\in \boldsymbol{N})$ 全体から成る集合とするときつぎのことを示せ．

(i) $(\{C_{p^n}\}_{n\in\boldsymbol{N}}, \mathscr{F})$ は射影系を成す

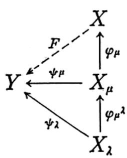
(ii) $\boldsymbol{Z}_p$ と $\varprojlim C_{p^n}$ は同位相であり群として同型である．——

射影的極限と双対的な概念として‘帰納的極限’がある．$(\Lambda, \prec)$ を順序集合 $(\Lambda\neq\phi)$，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Λ を添数集合とする位相空間の集合とし，$\lambda\prec\mu$ $(\lambda, \mu\in\Lambda)$ のとき連続写像 $\varphi_\mu{}^\lambda: X_\lambda\to X_\mu$ が与えられ $\varphi_\lambda{}^\lambda=1_{X_\lambda}$，さらに $\lambda\prec\mu\prec\nu$ のとき $\varphi_\nu{}^\mu\circ\varphi_\mu{}^\lambda=\varphi_\nu{}^\lambda$ が成り立っているとする．このとき $\varphi_\mu{}^\lambda$ の全体を Φ と書き，$(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \Phi)$ を**帰納系** (inductive system) と呼ぶ．$\tilde{X}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus X_\lambda$ (disjoint sum) とし $\tilde{X}$ の元の間の関係 $\sim$ を

$$(x_\lambda, \lambda)\sim(x_\mu, \mu) \iff \exists\nu(\lambda\prec\nu\wedge\mu\prec\nu\wedge\varphi_\nu{}^\lambda(x_\lambda)=\varphi_\nu{}^\mu(x_\mu))$$

を成り立たせるように定める．$\sim$ は同値関係となる．$\tilde{X}$ の商空間 $X=\tilde{X}/\sim$ を $(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \Phi)$ の**帰納的極限** (inductive limit) と呼び，$X=\varinjlim_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \Phi)$ または $X=\varinjlim X_\lambda$ と書く．X_λ の任意の元 x_λ を (x_λ, λ) の同値類に対応させる写像 φ_λ は**標準的写像**と呼ばれ，連続であって $\lambda\prec\mu$ $(\lambda, \mu\in\Lambda)$ のとき $\varphi_\mu\circ\varphi_\mu{}^\lambda=\varphi_\lambda$ が成り立つ．定理 2.17 とは双対的なつぎの定理が成り立つ．

定理 2.18 位相空間の帰納系 $(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \Phi)$ と位相空間 Y，連続写像 $\psi_\lambda: X_\lambda\to Y$ $(\lambda\in\Lambda)$ が与えられ，$\lambda\prec\mu$ $(\lambda, \mu\in\Lambda)$ のとき $\psi_\mu\circ\varphi_\mu{}^\lambda=\psi_\lambda$ が成り立つとする．このとき連続写像 $F: X\to Y$ $(X=\varinjlim X_\lambda)$ が一意的に存在し，Λ の任意の元 λ に対して $\psi_\lambda=F\circ\varphi_\lambda$ が成り立つ．



問題 2.36 上の定理 2.18 を証明せよ．

例 2.29　X を位相空間，$x\in X$，$\mathcal{O}_x$ を x の開近傍全体の集合とする．$\mathcal{O}_x\ni U$, V に対して $U\prec V \Leftrightarrow U\supset V$ が成り立つように関係 $\prec$ を定めれば，$(\mathcal{O}_x, \prec)$ は順序集合である．(このとき，$U\cap V\in\mathcal{O}_x$ となるから $(\mathcal{O}_x, \prec)$ は有向集合となる.) $\mathcal{O}_x\ni U$ に対して $S(U)=\boldsymbol{R}^U$ とおき $S(U)$ を離散空間と考える．$S(U)$ は U から $\boldsymbol{R}$ への写像全体から成る集合で，$S(U)\ni f, g$ に対してそれらの和 $f+g$ を $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$ $(u\in U)$ によって定めれば $f+g\in S(U)$ となり，さらに $\boldsymbol{R}\ni a$ が与えられたとき f のスカラー倍 af を $(af)(u)=a(f(u))$ $(u\in U)$ によって定めれば $af\in S(U)$，ゆえに $S(U)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となる．$U\prec V$ すなわち $U\supset V$ のとき写像 $\varphi_V{}^U: S(U)\to S(V)$ を $\varphi_V{}^U(f)=f|_V$ $(f\in S(U))$ によって定めれば $(\{S(U)\}_{U\in\mathcal{O}_x}, \{\varphi_V{}^U\})$ は帰納系を成す．$\varinjlim_{U\in\mathcal{O}_x} S(U)=S_x$ と書き $\varphi_U{}^x$ を $S(U)$ から S_x への標準的写像とする．$U, V\in\mathcal{O}_x$ とし $f\in S(U)$，$g\in S(V)$ とするとき，$\varphi_U{}^x(f)=\varphi_V{}^x(g)$ が成り立つための必要十分条件は $\mathcal{O}_x$ の元 W が存在し $W\subset U\cap V$, $f|_W=g|_W$ が成り立つことである．$f\in S(U)$ に対して S_x の元 $\varphi_U{}^x(f)$ を x における f の**芽** (germ) と呼び単に f_x と書くことにする．S_x は x の上の**茎** (stalk) と呼ばれる．各 S_x は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となる．こうして X という‘畑’の上に生える‘関数の芽’をつけた茎の‘たば’ $\tilde{S}=\sum_{x\in X}\oplus S_x$ (disjoint sum) が得られる．$\tilde{S}$ の元 (f_x, x) を単に f_x と表わすことにする．$\tilde{S}$ を X から $\boldsymbol{R}$ への**関数の芽の層** (sheaf of germs of functions——sheaf は‘たば’という意味をも持つ——) と呼ぶ．$\tilde{S}$ に適当な位相を与えると，$\tilde{S}$ の元 $f_x=\varphi_U{}^x(f)$ と $g_y=\varphi_V{}^y(g)$ に対して x, y をともに含む‘小さな’開集合 W があり，さらに $S(W)$ の元 h がとれて $\varphi_U{}^x(f)=\varphi_W{}^x(h)$，$\varphi_V{}^y(g)=\varphi_W{}^y(h)$ が成り立つとき，f_x と g_y が‘近く’なるようにできる．すなわち $x\in X$, $U\in\mathcal{O}_x$, $f\in S(U)$ に対して $\tilde{U}(f, U)=\{f_x\in\tilde{S}\mid x\in U\}$ とおき $\tilde{\mathcal{O}}_0=\{\tilde{U}\in\mathcal{P}(\tilde{S})\mid \exists x\exists U\exists f\,(x\in X\wedge U\in\mathcal{O}_x\wedge f\in S(U)\wedge \tilde{U}=\tilde{U}(f, U))\}$ とおけば容易にわかるように $\tilde{\mathcal{O}}_0$ は $\tilde{S}$ の開基の公理を満たし，$\tilde{S}$ は $\tilde{\mathcal{O}}_0$ を開基とする位相空間の構造を持つ．$\tilde{S}$ の元 f_x を X の元 x に対応させる写像 p を層 $\tilde{S}$ から X への**射影**と呼ぶ．p が連続写像であることを示そう．そのためには，$x\in U\in\mathcal{O}_x$ のとき $p^{-1}(U)$ が $\tilde{S}$ の開集合であることを示せばよい．$f_x\in p^{-1}(U)$ とすれば $V\in\mathcal{O}_x$ $(V\subset U)$ および $g\in S(V)$ が存在して $f_x=\varphi_V{}^x(g)$ となるから，$f_x\in\tilde{U}(g, V)\subset p^{-1}(U)$，すなわち $p^{-1}(U)$ は開集合となる！　ここ

で p を f_x の開近傍 $\tilde{U}(g, V)$ に制限した写像 $p|_{\tilde{U}(g,V)}$ を p' と書く．$\tilde{U}(g, V)$ の各元 g_y $(y \in V)$ は p' によって y に対応させられ，p' は全単射となる．V の元 y を $\tilde{U}(g, V)$ の元 g_y に対応させる写像は明らかに連続であり，それは p' の逆写像だから p' は位相写像となる！ こうして層 $\tilde{S}$ の開集合 $\tilde{U}(g, V)$ と X の開集合 V とは同位相となることがわかった！ ベクトル空間 S_x の和，$\boldsymbol{R}$ の定数 a によるスカラー倍がともに連続写像となることも直ちに確かめられる．（上の構成で $\boldsymbol{R}$ の位相的性質は全く使わなかった．$\boldsymbol{R}$ のかわりに任意の体をとっても同様な構成ができる．また $\boldsymbol{R}$ のかわりに環 K をとれば，S_x は K 加群となり上と同様のことが成り立つ．他方，$S(U)$ として U から $\boldsymbol{R}$ への連続写像全体をとっても同様のことが成り立つ.)

§2.12 位相空間の連結性

例 2.8 で示されたように，p 進整数環 $\boldsymbol{Z}_p$ は p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ の閉かつ開集合となる．一般に位相空間 X はそれ自身および空集合をいつも閉かつ開集合として含むが，もしも X の閉かつ開集合 S で X とも ϕ とも異なるものがあれば，X は**非連結** (disconnected) であると呼ばれ，X の閉かつ開集合は X 自身あるいは ϕ に限るとき，X は**連結** (connected) であるといわれる．X の部分集合 Y は X の部分空間として連結（または非連結）であるとき，X の連結（または非連結）な部分集合と呼ばれる．

定理 2.19 1次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}$ は連結である．

証明 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 S が閉かつ開集合でかつ $\boldsymbol{R}$ 自身とも空集合とも異なると仮定して矛盾を導こう．$T=\boldsymbol{R}-S$ とおくと上の仮定により T は閉かつ開集合，$T \neq \boldsymbol{R}$, $T \neq \phi$. さて $s \in S$, $t \in T$ とし $s<t$ の場合を考えよう ($t<s$ の場合も全く同様にできる)．$T'=\{x \in T \mid s<x\}$ とおけば $t \in T'$, ゆえに $T' \neq \phi$ となり，s は T' の下界となる．$t_0=\inf T'$ とおけば $t_0 \in \bar{T}' \subset \bar{T}=T$, ゆえに $t_0 \in T$. $S \cap T=\phi$ だから $s<t_0$, したがって $t_0 \in T'$. 一方 $t_0 \in \bar{S}=S$, ゆえに $t_0 \in S \cap T' \subset S \cap T$. これは $S \cap T=\phi$ と矛盾する．▌

定理 2.20 連結位相空間の連続写像による像は連結である．

証明 X を連結位相空間，Y を位相空間，f を X から Y の上への連続写像とする．S を Y の閉かつ開集合とすれば，$f^{-1}(S)$ は X の閉かつ開集合だから

$f^{-1}(S)=X$ または ϕ, ゆえに $S=Y$ または ϕ である. ▌

$\boldsymbol{R}$ の開区間 $(0, 1)$ と $\boldsymbol{R}$ は同位相だから上の定理によって $(0, 1)$ は連結である. $(0, 1]$, $[0, 1]$ は連結だろうか. 実は, つぎの定理が成り立つ.

定理 2.21 X を位相空間, S を X の連結な部分集合, $S\subset T\subset \bar{S}$ とすれば T は連結である.

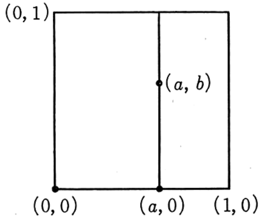
証明 U を T の閉かつ開集合で ϕ とも T とも異なるものとしよう. U が X の部分空間 T の開集合であることから X の開集合 V が存在し $U=V\cap T$ となる. $T\subset\bar{S}$ より明らかに $V\cap S\neq\phi$. 一方 $T-U$ はまた T の開集合だから X の開集合 W を適当にとれば $T-U=W\cap T$ となる. ここで $T-U\neq\phi$ だから上と同様に $W\cap S\neq\phi$. また $(V\cap S)\cap(W\cap S)\subset(V\cap T)\cap(W\cap T)=U\cap(T-U)=\phi$. ゆえに $V\cap S$ は S の閉かつ開集合となる. $V\cap S\neq\phi$ だから S の連結性より $V\cap S=S$, ゆえに $V\supset S$. 同様に $W\cap S$ は S の閉かつ開集合で ϕ とは異なるから $W\supset S$. ゆえに $(V\cap S)\cap(W\cap S)=S\cap S=S$. ところが $(V\cap S)\cap(W\cap S)=\phi$ だから $S=\bar{S}=\phi$, ゆえに $T=\phi$, $U=\phi$ となり矛盾が導かれた. ▌

上の証明にも使われたように, 位相空間 X の部分集合 S が非連結となるための必要十分条件は X の開集合 U, V が存在して $S\cap U\neq\phi\wedge S\cap V\neq\phi$, しかも

$$S\subset U\cup V\wedge S\cap U\cap V=\phi$$

が成り立つことである(読者自ら確かめられたい).

上の定理から区間 $(0, 1]$, $[0, 1)$, $I=[0, 1]$ はみな連結であることがわかる. では $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $I\times I$ などは連結だろうか. $I\times I$ の点 (a, b) を任意にとると, (a, b) は連結集合 $S=\{(x, y)\in I\times I\mid x=a\}$ (S は I と同位相) に含まれる. 一方 S の '下端' $(a, 0)$ は '原点' $(0, 0)$ とともに連結集合 $T=\{(x, y)\in I\times I\mid y=0\}$ に含まれる. このことから $I\times I$ が連結となることがいえそうである! 実はさらに強



いつぎの結果が得られる.

定理 2.22 X を位相空間, x を X の元とする. X の任意の元 y に対して X の連結集合 S_y が存在して, $S_y \ni x, y$ となるならば X は連結である.

証明 X が非連結であると仮定して矛盾を導こう. $X=U\cup V$, $U\cap V=\phi$, U, V を X の開集合, $U\neq\phi$, $V\neq\phi$ とする. $x\in U$ としよう. y を V の任意の元とし, x, y を含む連結集合 S_y をとろう. $S_y\subset U\cup V$, $S_y\cap U\ni x$, $S_y\cap V\ni y$, また $S_y\cap U\cap V=\phi$, ゆえに S_y は非連結となり矛盾が導かれた. ▌

系 X を位相空間, S, T を X の連結部分集合とし $S\cap T\neq\phi$ とすれば $S\cup T$ も連結である.

証明 $x\in S\cap T$, $y\in S$ のとき $S_y=S$ とおき, $y\in T-S$ のとき $S_y=T$ とおけば上の定理が適用される. ▌

定理 2.23 $\Lambda\,(\neq\phi)$ を添数集合とする連結集合の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は連結である.

証明 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\neq\phi$ のときを証明すればよい. $x=(x_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ としよう. いま $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の元 $y=(y_\lambda)$ に対し, Λ の有限部分集合 $\Lambda_0=\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ があって $\Lambda-\Lambda_0$ の任意の元 λ に対して $y_\lambda=x_\lambda$ となっているものとする. ここで, $x=y^{(0)}$ とし, $y^{(1)}=(y_\lambda{}^{(1)})$ を $y_{\lambda_1}{}^{(1)}=y_{\lambda_1}$, $y_\lambda{}^{(1)}=x_\lambda\ (\lambda\in\Lambda-\{\lambda_1\})$ によって定め, $y^{(1)}=(y_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_\lambda, \cdots)$ と書こう. さらに, 同様に $y^{(2)}=(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, \cdots, x_\lambda, \cdots)$, $\cdots$, $y^{(n)}=y$ と書く. ここで,

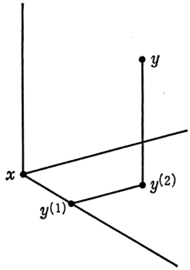
$$S_1=\left\{(z_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \,\middle|\, \forall\lambda(\lambda\in\Lambda-\{\lambda_1\}\Longrightarrow z_\lambda=x_\lambda)\right\}$$

$$S_2=\left\{(z_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \,\middle|\, \forall\lambda(\lambda\in\Lambda-\{\lambda_2\}\Longrightarrow z_\lambda=y_\lambda{}^{(1)})\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_i=\left\{(z_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \,\middle|\, \forall\lambda(\lambda\in\Lambda-\{\lambda_i\}\Longrightarrow z_\lambda=y_\lambda{}^{(i)})\right\}\qquad(i=1, \cdots, n)$$

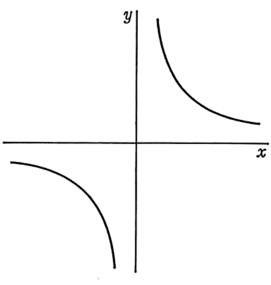
とおけば S_i は明らかに X_{λ_i} と同位相であるから連結である (図参照). ゆえに $S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$ は明らかに連結であり, x, y をともに含む. こうして Λ の任意の有限部分集合 Λ_0 をとったとき $\Lambda-\Lambda_0$ の任意の元 λ に対して $x_\lambda=y_\lambda$ となるような $y=(y_\lambda)$ をとると連結集合 S_y があり, $x, y\in S_y$ となる. ここで $T=\{y\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\,|$



$\exists\Lambda_0[|\Lambda_0|<\infty \wedge \forall\lambda(\lambda\in\Lambda-\Lambda_0 \Longrightarrow y_\lambda=x_\lambda)]\}$ とおくと，明らかに T は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の到る所で稠密であり，定理 2.22 によって T は連結集合となる．したがって定理 2.21 により $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda=\bar{T}$ も連結である．▌

X を位相空間，x を X の元とし $\mathscr{C}$ を x を含む X の連結部分集合全体から成る集合としよう．$\mathscr{C}$ は $\{x\}$ を含む．$C_x=\bigcup\mathscr{C}$ は定理 2.22 によって x を含む連結集合となるから $\mathscr{C}$ の中の‘最大’の集合とみなされる．C_x は x の**連結成分** (connected component) と呼ばれる．定理 2.21 により $\bar{C}_x=C_x$ だから C_x は閉集合となる．$X\ni x, y$ のとき $C_x\cap C_y\neq\phi \Leftrightarrow C_x=C_y \Leftrightarrow y\in C_x \Leftrightarrow x\in C_y$ が成り立つことも定義より明らかである．C_x を単に X の連結成分とも呼ぶ．

例 2.30　$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 X を，$X=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid xy=1\}$ によって定めると，X は 2 個の連結成分 $C_{(1,1)}, C_{(-1,-1)}$ の直和となる．——



位相空間 X の各元 x の連結成分 C_x が $\{x\}$ となるとき，X は**完全非連結** (to-

tally disconnected) であるといわれる．離散空間は完全非連結である．また離散空間の集合の直積空間はまた完全非連結である．

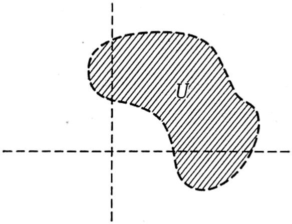
問題 2.37　$\boldsymbol{R}$ の部分空間 $\boldsymbol{Q}$ は完全非連結であることを示せ．

問題 2.38　(i)　完全非連結な位相空間の部分空間は完全非連結であることを示せ．

(ii)　順序集合 $\Lambda\,(\neq\phi)$ を添数集合とする離散空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその射影系 $(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\ \{f_\lambda{}^\mu\})$ が与えられたとき，$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は完全非連結となることを示せ．

(iii)　p 進整数環 $\boldsymbol{Z}_p$ は完全非連結であることを示せ．——

$\boldsymbol{R}^2$ から x 軸 y 軸を取り去った残りの部分 X，すなわち $X=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,xy\neq0\}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間として明らかに連結ではないが，4個の連結な閉かつ開集合 $C_1=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x, y>0\}$，$C_2=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x>0\wedge y<0\}$，$C_3=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x<0\wedge y>0\}$，$C_4=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x, y<0\}$ の直和となる．さらに X の任意の開集合 U をとると U を X の部分空間とみなしたとき，U の任意の連結成分はまた X の開集合となることがわかる（読者自ら確かめられたい）．



一般に位相空間 X の任意の開集合 U の（U を X の部分空間とみなしたときの）連結成分が必ずまた X の開集合となるとき，X を**局所連結** (locally connected) であるという．

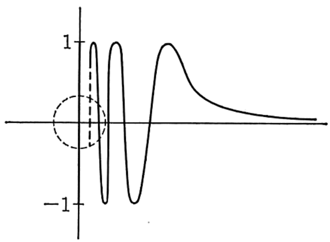
定理 2.24　位相空間 X が局所連結となるための必要十分条件は，X の任意の元 x とその任意の近傍 U に対して x の連結な近傍 V があり $V\subset U$ となることである．

証明　X が局所連結であるとし，$x\in X$，U を x の近傍，U_0 は X の開集合で $x\in U_0\subset U$ を満たすものとしよう．V を U_0 の連結成分で x を含むものとすれ

ば，V は仮定により開集合だから x の連結な近傍となり，$V \subset U$ である．

逆に U を X の任意の開集合 $(U \neq \phi)$ とし C をその連結成分の一つとしよう．$x \in C$ とすると U は x の近傍である．このとき x の連結な近傍 V で U の部分集合となるものがあれば $V \subset C$，したがって C は開集合であり X は局所連結である．▌

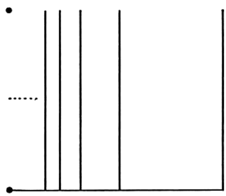
例 2.31　$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 X を，$X=\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y=\sin(1/x) \wedge x>0\} \cup \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x=0 \wedge -1 \leqq y \leqq 1\}$ によって定める．X は連結空間となるが，(0, 0) の小さ



い近傍をとればわかるように局所連結ではない．——

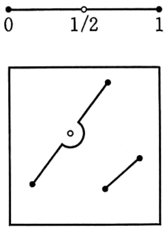
前にも述べたように $I=[0, 1]$ は連結である．したがって，I から位相空間 X への連続写像 f が与えられたとき $f(I)$ は X の連結部分集合となる (定理 2.20)．$f(0)=a$，$f(1)=b$ とするときこのような $f(I)$ を X の元 a, b を結ぶ**弧** (arc) と呼ぶ．X はその任意の 2 元 a, b に対して，それらを結ぶ弧が存在するとき**弧状連結** (arcwise connected) であるといわれる．定理 2.22 から弧状連結な位相空間は連結である．

例 2.32　$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 X を $X=\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \exists n (n \in \boldsymbol{N} \wedge x=1/n \wedge 0 \leqq y \leqq 1)\}$



$\cup\{(0,0),(0,1)\}$ とおいて定めると，$(0,0),(0,1)$ を結ぶ弧は存在しないので，X は弧状連結ではないが，$(0,0)$ の連結成分 C を考えると明らかに $(0,1)$ 以外のすべての X の点は C に含まれるが，$(0,1)\in\bar{C}=C$ だから $C=X$ となり X は連結である．——

連結性の考え方を用いて $I=[0,1]$ と $I\times I$ が同位相にはならないことを証明することができる．いま仮に I から $I\times I$ の上への位相写像 f が与えられたとしよう．$I-\{1/2\}$ は明らかに非連結である．$f(1/2)=(a,b)$ とすれば (a,b) は $I\times I$ の内点であり，$f(I-\{1/2\})=I\times I-\{(a,b)\}$，しかも $I-\{1/2\}$ と $I\times I-\{(a,b)\}$ は

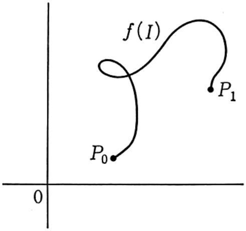


同位相となるはずである．しかし $I\times I-\{(a,b)\}$ は明らかに弧状連結だから連結であり，それが非連結な $I-\{1/2\}$ と同位相になることは不可能である！ したがって I と $I\times I$ は同位相にはなり得ない！

第3章　コンパクト集合

§3.1　コンパクト位相空間

閉単位区間 $I=[0,1]$ から $\boldsymbol{R}^2$ への連続写像 f が与えられたとしよう．$f(0)=P_0$，$f(1)=P_1$ とおくと $f(I)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の点 P_0, P_1 を結ぶ弧となる．f のとり方によって $f(I)=\{P_0\}$ $(f(0)=f(1)=P_0)$ となること，すなわち弧 $f(I)$ が1点のみから成ることもあるが，$f(I)$ が2個あるいはそれ以上の点を含めば弧 $f(I)$ は必ず無限個の点を含む．なぜなら $f(I)$ は連結集合であり，もしも $f(I)$ が有限個の点から成る $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合ならば，$f(I)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間として離散空間となるので完全非連結，したがって1点のみから成る集合となるからである．$f(I)$ が無限個の点を含むとき，$f(I)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の有界部分集合となるだろうか．すなわち十分大きな実数 k を選べば $f(I)$ は円 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq k\}$ に部分集合として含まれるだろうか．この問題について考える前に，これと関連して f が一様連続となるかどうかについて考えよう．そのために正の実数 ε を一つとり，$\boldsymbol{R}^2$ の点 P の ε 近傍を $V_\varepsilon(P)$ と記して，I の各点 x に対しその近傍 $U(x)$ を



$$U(x)=(x-\delta(x), x+\delta(x))\cap I \quad (0<\delta(x)), \qquad f(U(x))\subset V_\varepsilon(f(x))$$

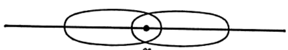
を満たすようにとる（f の連続性によりそれは可能である）．I は当然 $U(x)$ $(x\in I)$ たち全体によって覆われる（すなわち $I=\bigcup_{x\in I}U(x)$）．ここで I は $U(x)$ $(x\in I)$ の中の有限個のものによって覆われることが示される．実際 $n\in\boldsymbol{N}$ に対

して x_n を

$$x_n = \sup\left\{x \in I \,\middle|\, \exists y_1 \cdots \exists y_n\left(y_i \in I\,(i=1, \cdots, n) \wedge [0, x] \subset \bigcup_{1 \leqq i \leqq n} U(y_i)\right)\right\}$$



とおいて定めよう．もしも $x_n<1$ ならば $x_n<x_{n+1}\leqq 1$ となる．(実際このとき $U(x_n)$ に含まれる点 x, x' を $x<x_n<x'$ を満たすようにとれば I の点 $y_1, \cdots, y_n$ で $[0, x]\subset \bigcup_{1\leqq i\leqq n} U(y_i)$ を満たすものがあり，$y_{n+1}=x_n$ とおけば $[0, x']\subset \bigcup_{1\leqq i\leqq n+1} U(y_i)$ となる．ゆえに $x'\leqq x_{n+1}\leqq 1$，$x_n<x_{n+1}\leqq 1$ である.）ここでもしもどの自然数 n に対しても $x_n<1$ となれば，点列 $(x_n)_{n\in N}$ が得られ $x_n<x_{n+1}<1$ $(n\in \boldsymbol{N})$，ゆえに $\sup\{x_n\}_{n\in N}=x\leqq 1$，$x_n<x$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$，$0<x$ となる．ところが $U(x)$ に含まれる点 x' を $x'<x$ となるようにとると，自然数 n で $x'<x_n<x$ を満たすものが存在する．したがって $x\leqq x_{n+1}$ となり，これは矛盾である！　こうして適当な自然数 n をとると $x_n=1$ となること，すなわち $I=\bigcup_{1\leqq i\leqq n} U(y_i)$ を満たす I の元 $y_1, \cdots, y_n$ $(0\leqq y_1<y_2<\cdots<y_n\leqq 1)$ があることがわかった！　$\delta=\min\{\delta(y_1), \cdots, \delta(y_n)\}$ とおいて，$x\in I$ に対して $U_\delta(x)=(x-\delta, x+\delta)\cap I$ とおけば，$x\in U(y_i)$，$y\in U_\delta(x)$ とするとき x, y はともに $U(y_i)$ に含まれるか，あるいは $y_{i-1}\leqq y<x$



$\leqq y_i$ または $y_i\leqq x<y\leqq y_{i+1}$ のいずれかの場合が成り立つ．$x, y\in U(y_i)$ ならば

$$|f(x)-f(y)| \leqq |f(x)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(y)| < 2\varepsilon,$$

$y_{i-1}\leqq y<x\leqq y_i$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leqq |f(x)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(y_{i-1})|+|f(y_{i-1})-f(y)| \\ &< \varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon = 4\varepsilon,\end{aligned}$$

$y_i\leqq x<y\leqq y_{i+1}$ の場合にも同様に $|f(x)-f(y)|<4\varepsilon$ となるから，$f(U_\delta(x))\subset V_{4\varepsilon}(f(x))$ が I の任意の元 x について成り立つ！　こうして f は一様連続であることが示された．また $|f(y_{i+1})-f(y_i)|<2\varepsilon$ となるから $f(I)$ は明らかに有界である！

さて X を位相空間，$\mathcal{U}$ は X の部分集合から成る集合で $X=\bigcup\mathcal{U}$ を満たすものとするとき，$\mathcal{U}$ を X の**被覆** (covering) と呼び，$\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ しかも $X=\bigcup\mathcal{V}$ が成り立つとき $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の**部分被覆** (subcovering) と呼ぶ．特に $\mathcal{U}$ の各元が X の開集合であるとき，$\mathcal{U}$ は X の**開被覆**と呼ばれる．

位相空間 X はその任意の開被覆が有限な部分被覆を持つとき**コンパクト** (compact) であるといわれる．I は上に述べたことからわかるようにコンパクトである．$\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない．実際 $\boldsymbol{R}$ の開被覆 $\mathcal{U}$ として $(n-2/3, n+2/3)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ 全体から成るものをとれば，$\mathcal{U}$ は明らかに有限部分被覆を持ち得ない！

位相空間 X の部分集合 S は X の部分空間としてコンパクトであるとき X のコンパクト(部分)集合と呼ばれる．

定理 3.1 コンパクト位相空間の閉部分集合はコンパクトである．

証明 X をコンパクト位相空間，S をその閉集合とする．$\mathcal{U}$ を S の開被覆とすれば，その任意の元は $U\cap S$ (ただし U は X の開集合)のように表わされる．いま $\mathcal{O}$ を X の開集合全体から成る集合，$\tilde{\mathcal{U}}=\{U\in\mathcal{O}\mid U\cap S\in\mathcal{U}\}$ とし $\tilde{\mathcal{U}}'=\tilde{\mathcal{U}}\cup\{X-S\}$ とおけば $\tilde{\mathcal{U}}'$ は明らかに X の開被覆となる．X はコンパクトだから $\tilde{\mathcal{U}}'$ は有限の部分被覆 $\tilde{\mathcal{V}}$ を持つ．$\mathcal{V}=\{V\in\mathcal{P}(S)\mid\exists U(U\in\tilde{\mathcal{V}}\wedge V=U\cap S)\}$ が $\mathcal{U}$ の有限部分被覆となることは明らかである．▌

定理 3.2 コンパクト位相空間の連続写像による像はコンパクトである．

証明 X をコンパクト位相空間，f を X から位相空間 Y の上への連続写像とする．$\mathcal{U}$ を Y の開被覆，$\mathcal{V}=\{V\in\mathcal{P}(X)\mid\exists U(U\in\mathcal{U}\wedge V=f^{-1}(U))\}$ とすると $\mathcal{V}$ は X の開被覆だから有限部分被覆 $\mathcal{V}_0$ を持つ．$\mathcal{U}_0=\{U\in\mathcal{P}(Y)\mid\exists V(V\in\mathcal{V}_0\wedge U=f(V))\}$ は有限集合で明らかに $\mathcal{U}$ の部分被覆となる．▌

問題 3.1 (i) 密着位相空間(またはその任意の部分集合)はコンパクトであることを示せ．

(ii) 離散位相空間は有限集合であるとき，またそのときに限ってコンパクトであることを示せ．

§3.2 有限交叉性とコンパクト性

定理 3.2 によって位相空間の任意の弧はコンパクトであることがわかる．では $I\times I$ はコンパクトだろうか．実はコンパクト位相空間の直積空間はまたコンパ

クトになるのだが，このことを示す前にいくつかの準備をしよう．

一般に S を集合とするときその任意の有限部分集合 P $(\neq\phi)$ に対して $\bigcap P\neq\phi$ が成り立つならば，S は**有限交叉性** (finite intersection property) を持つという．たとえば S として $\boldsymbol{R}$ の開区間 $(0, a)$ $(0<a)$ 全体から成る集合をとると S は有限交叉性を持つが $\bigcap S=\phi$ である．

位相空間 X に関するつぎの命題を考えよう．

(C_0) X はコンパクトである

(C_1) $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ $(\neq\phi)$ が有限交叉性を持てば $\bigcap_{S\in\mathcal{S}}\bar{S}\neq\phi$

(C_2) $\mathcal{O}_1$ を X の開集合の部分基，$\mathcal{U}_1$ を $\mathcal{O}_1$ の部分集合で X の開被覆となるものとすると，$\mathcal{U}_1$ は有限部分被覆を持つ

(C_3) $\mathcal{S}_1$ を X の閉集合の集合 $(\mathcal{S}_1\neq\phi)$ でその各元 S に対し $\mathcal{O}_1$ の元 U がとれて $S=X-U$ が満たされるとする．このとき $\mathcal{S}_1$ が有限交叉性を持てば $\bigcap\mathcal{S}_1\neq\phi$．

実は (C_0)-(C_3) はみな互いに同値となる！ まず (C_0) $\Longrightarrow$ (C_1) が成り立つことを示そう．X がコンパクトであることを仮定し，$\bigcap_{S\in\mathcal{S}}\bar{S}=\phi$ から矛盾を導けばよい．X の中での補集合を考えると $(\bigcap\bar{S})^c=\bigcup\bar{S}^c=X$，ゆえに $\{\bar{S}^c\}_{S\in\mathcal{S}}$ は X の開被覆となる．X がコンパクトだから $\mathcal{S}$ の有限部分集合 $\{S_1, \cdots, S_n\}$ があり，$\{\bar{S}_1{}^c, \cdots, \bar{S}_n{}^c\}$ が X の被覆となる．すなわち $\bigcup_{i=1}^{n}\bar{S}_i{}^c=X$．両辺の補集合をとれば $\bigcap_{i=1}^{n}\bar{S}_i=\phi$．ところが $\bigcap_{i=1}^{n}\bar{S}_i\supset\bigcap_{i=1}^{n}S_i$ であるから，これは $\mathcal{S}$ が有限交叉性を持つという仮定に反する！ (C_1) $\Longrightarrow$ (C_0) が成り立つことも同様の考え方で示されるからこれは読者に任せよう．(C_2) $\Longleftrightarrow$ (C_3) が成り立つことは (C_0) $\Longleftrightarrow$ (C_1) の証明とまったく同様な論法で示される．また (C_1) $\Longrightarrow$ (C_3) が成り立つことは自明である．したがって (C_3) $\Longrightarrow$ (C_1) が成り立つことを示せば，(C_0)-(C_3) が互いに同値となることが証明される．(C_3) $\Longrightarrow$ (C_1) を導くためには§2.5で述べたフィルターの概念を用いる．

$\mathcal{S}$ を (C_1) で述べた集合としよう．いま，$\mathcal{F}=\{T\in\mathcal{P}(X)\mid\exists\mathcal{T}(\mathcal{T}\subset\mathcal{S}\wedge|\mathcal{T}|<\infty\wedge\mathcal{T}\neq\phi\wedge T\supset\bigcap\mathcal{T})\}$ とおくと $\mathcal{F}$ は X のフィルターとなる ($\mathcal{S}$ が有限交叉性を持つことから $\mathcal{T}$ を $\mathcal{S}$ の有限部分集合 $(\mathcal{T}\neq\phi)$ とすると $\bigcap\mathcal{T}\neq\phi$，これから $\mathcal{F}$ は ϕ を元として含まないことが示され，$T, T'\in\mathcal{F}\Longrightarrow T\cap T'\in\mathcal{F}$ が成り立つことも直ちにわかる)．$\mathcal{F}\supset\mathcal{S}$ だから (C_3) を仮定して $\bigcap_{T\in\mathcal{F}}\bar{T}\neq\phi$ を導けば十分であるが，

(C_3) をうまく用いるために $\mathscr{F}$ を含む(したがって $\mathscr{S}$ を含む) X の極大フィルター $\tilde{\mathscr{F}}$ をとろう．ここで $\bigcap_{F\in\tilde{\mathscr{F}}}\bar{F}\neq\phi$ を示せばよい．$\tilde{\mathscr{F}}$ の各元 F について $\bar{F}$ が X 自身の場合には問題はないから，$\tilde{\mathscr{F}}$ の元 F で $\bar{F}$ が X 以外のものがある場合について考えよう．このとき $\bar{F}$ の補集合 $\bar{F}^c$ は空集合とは異なる X の開集合であるから

$$\bar{F}^c \supset U_1\cap\cdots\cap U_n$$

を満たすような $\mathcal{O}_1$ の元 $U_1, \cdots, U_n$ がある．ゆえに

$$U_1{}^c\cup\cdots\cup U_n{}^c\supset\bar{F}\supset F.$$

したがって $U_1{}^c\cup\cdots\cup U_n{}^c\in\tilde{\mathscr{F}}$．ここでつぎの補題を用いる．

補題 3.1　集合 X の極大フィルター $\tilde{\mathscr{F}}$ が与えられたとき，

(i)　$S\subset X$ について $\forall F(F\in\tilde{\mathscr{F}}\Longrightarrow S\cap F\neq\phi)$ が成り立てば $S\in\tilde{\mathscr{F}}$ が成り立つ

(ii)　$S, T\subset X$ について $S\cup T\in\tilde{\mathscr{F}}$ ならば S または T が $\tilde{\mathscr{F}}$ に含まれる．

証明　(i)　$\tilde{\mathscr{F}}'=\{F\in\mathcal{P}(X)\,|\,F\in\tilde{\mathscr{F}}\vee F\supset S\}$ とおけば $\tilde{\mathscr{F}}'$ は明らかに X のフィルターで $\tilde{\mathscr{F}}$ を含むから $\tilde{\mathscr{F}}$ の極大性によって $\tilde{\mathscr{F}}'=\tilde{\mathscr{F}}$，ゆえに $S\in\tilde{\mathscr{F}}$．

(ii)　もしも S も T も $\tilde{\mathscr{F}}$ に含まれなければ (i) により $\tilde{\mathscr{F}}$ の元 F, F' があり $F\cap S=\phi$, $F'\cap T=\phi$ が満たされる．このとき $(S\cup T)\cap(F\cap F')=(S\cap F\cap F')\cup(T\cap F\cap F')=\phi$ となり $S\cup T, F\cap F'$ がともに $\tilde{\mathscr{F}}$ に属し，したがってそれらの共通部分も $\tilde{\mathscr{F}}$ の元となるということに矛盾する．▌

上の補題により，いまの場合 $U_1{}^c, \cdots, U_n{}^c$ のどれかは $\tilde{\mathscr{F}}$ の元となることがわかる．さてここで

$$\mathscr{S}_1=\{S\in\mathcal{P}(X)\,|\,\exists U(U\in\mathcal{O}_1\wedge U^c\in\tilde{\mathscr{F}}\wedge S=U^c)\}$$

とおくと上のことから $\mathscr{S}_1\neq\phi$，また $\mathscr{S}_1\subset\tilde{\mathscr{F}}$ だから $\mathscr{S}_1$ は有限交叉性を持つ！　したがって (C_3) より $\bigcap\mathscr{S}_1\neq\phi$．ここで実は $\tilde{\mathscr{F}}$ の任意の元 F に対して $\bigcap\mathscr{S}_1\subset\bar{F}$ が成り立つ．$\bigcap\mathscr{S}_1$ の元 x および $\tilde{\mathscr{F}}$ の元 F があって $x\notin\bar{F}$ となると仮定して矛盾を導こう．$x\in\bar{F}^c$ であるから $\mathcal{O}_1$ の元 $V_1, \cdots, V_m$ があり $x\in V_1\cap\cdots\cap V_m\subset\bar{F}^c$，ゆえに $\bar{F}\subset V_1{}^c\cup\cdots\cup V_m{}^c$，したがって上の補題を再び用いて $V_1{}^c, \cdots, V_m{}^c$ のいずれか $V_i{}^c$ が $\tilde{\mathscr{F}}$ に含まれることがいえる．$V_i{}^c\in\mathscr{S}_1$ ゆえ $x\in V_i{}^c$ となるが，これは $x\in V_1\cap\cdots\cap V_m$ に矛盾する！　こうして $\bigcap_{F\in\tilde{\mathscr{F}}}\bar{F}\supset\bigcap\mathscr{S}_1\neq\phi$ が示され，(C_1) の成り立つことが証明された．

$(C_3)\Leftrightarrow(C_1)$，あるいは $(C_3)\Leftrightarrow(C_0)$ が成り立つという命題は **Alexander** の

定理として知られている．

定理 3.3 (Tychonoff)　Λ ($\neq\phi$) を添数集合とするコンパクト位相空間の集合 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間はコンパクトである．

証明　$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ から X_λ への標準的射影を p_λ と書く．($X\neq\phi$ の場合を考える.)　$\mathcal{O}_1=\{U\in\mathcal{P}(X)\,|\,\exists U_\lambda(U_\lambda$ は X_λ の開集合 $\wedge$ $U=p_\lambda^{-1}(U_\lambda))\}$ は X の開集合全体の集合の部分基となる．$\mathcal{S}_1$ を空集合とは異なる $\mathcal{P}(X)$ の部分集合で，その任意の元は U^c ($U^c\in\mathcal{O}_1$) と表わされるものとし，$\mathcal{S}_1$ が有限交叉性を持つとしよう．$U=p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ (U_λ は X_λ の開集合) とすると，$U^c=X-U=p_\lambda^{-1}(X_\lambda-U_\lambda)$ であるから Λ の任意の元 μ について $p_\mu(U^c)$ は X_μ ($\mu\neq\lambda$) または $X_\lambda-U_\lambda$ ($\mu=\lambda$) に等しく，したがって $p_\mu(U^c)$ は X_μ の閉集合である．また $\mathcal{S}_{1,\lambda}=\{S\in\mathcal{P}(X_\lambda)\,|\,\exists\tilde{S}(\tilde{S}\in\mathcal{S}_1\wedge S=p_\lambda(\tilde{S}))\}$ とおくと，$\mathcal{S}_{1,\lambda}\neq\phi$，またその各元は X_λ の閉集合であり，しかも $\mathcal{S}_{1,\lambda}$ は有限交叉性を持つ．X_λ はコンパクトだから $\bigcap\mathcal{S}_{1,\lambda}$ に属する X_λ の元 x_λ がある．ここで X の元 x を $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ によって与えれば $x\in\bigcap\mathcal{S}_1$．こうして X が (C_3) を満たし，したがって X がコンパクトであることが示された．▌

Tychonoff の定理により $I\times I$, I^n ($n\in N$), I^I などはみなコンパクトであることがわかる．また a を任意の正の実数とするとき $[-a,a]$ は I と同位相，したがってコンパクトであるから，R^n の部分集合 $[-a,a]^n$ もコンパクトである．また定理 3.1 により $[-a,a]^n$ の閉集合はコンパクトであるから，R^n の有界閉集合はコンパクトである．一般に位相空間 X のコンパクト部分集合は X の閉集合となるとは限らない．このことは問題 3.1 (i) からも見られるが，Hausdorff 空間に関してはつぎの定理が成り立つ．

定理 3.4　X を Hausdorff 空間，C をそのコンパクト部分集合とすると C は X の閉集合である．

証明　$x\in\bar{C}$ とし $\mathcal{S}=\{S\in\mathcal{P}(X)\,|\,\exists U(U$ は x の近傍 $\wedge$ $S=U\cap C)\}$ とおけば $\mathcal{S}$ は有限交叉性を持つから C のコンパクト性により $\bigcap_{S\in\mathcal{S}}(\bar{S}\cap C)\neq\phi$．ところが y を x とは異なる X の元とすれば，x の近傍 U と y の近傍 V を適当に選んで $U\cap V=\phi$ が満たされるようにすることができる．このとき $y\notin\bar{U}$．ゆえに $\bigcap_{S\in\mathcal{S}}\bar{S}\cap C=\{x\}$，したがって $x\in C$，すなわち $C=\bar{C}$ が成り立つ．▌

系 1　R^n の部分集合 C がコンパクトであるための必要十分条件は，C が R^n の有界閉集合となることである．

証明 上の記述より C が $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト部分集合ならば C が有界であることを示せば十分である．正の実数 ε を固定し，C の各元 x の ε 近傍を $U_\varepsilon(x)$ と書き，$\mathcal{U}$ を $U_\varepsilon(x)\cap C$ $(x\in C)$ 全体から成る集合とすれば，$\mathcal{U}$ は C の開被覆となる．C はコンパクトだから $\mathcal{U}$ は有限部分被覆 $\{U_\varepsilon(x_i)\cap C\}_{i=1,\cdots,n}$ を持つ．$\boldsymbol{R}^n$ の原点 $\mathbf{0}=(0,\cdots,0)$ と x_i の距離 $d(\mathbf{0},x_i)=d_i$ とし，$d_k=\max\{d_1,\cdots,d_n\}$ とすれば，C の任意の元 x について $d(\mathbf{0},x)\leqq d_k+\varepsilon$ が成り立つ．▌

系 2 f をコンパクト位相空間 X から $\boldsymbol{R}$ への連続写像とすると，f は X で最大値，最小値をとる．

証明 $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合だから $\boldsymbol{R}$ の有界閉集合である．したがって $\max f(X)=a$ とすれば X の元 x で $f(x)=a$ を満たすものがある．すなわち，f は X で最大値をとる．最小値についても同様である．▌

例 3.1 n 次元球面 S^n（例 1.8）は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合なのでコンパクトである．一方，$\boldsymbol{R}^n$ はコンパクトではないので，S^n と $\boldsymbol{R}^n$ は同位相にはならない．特に S^1（円周）はコンパクトであり，したがって n 次元トーラス $\boldsymbol{T}^n$（例 2.21）はコンパクトである．（$\boldsymbol{T}^n$ は $\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$ と同位相!）．

例 3.2 位相空間の射影系 $(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\{f_\lambda^\mu\})$ において各 X_λ がコンパクト Hausdorff 空間ならば $\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ もコンパクト Hausdorff 空間となる．特に p 進整数環 $\boldsymbol{Z}_p$ はコンパクト Hausdorff 空間である．——

定理 3.4 系 1 の証明からもわかるように，距離空間 X のコンパクト部分集合は X の有界閉集合であるが，その逆は必ずしも成り立たない．たとえば X を離散距離空間，$S\subset X$ とすれば S は X の有界閉集合であるが，S が有限集合でなければ S はコンパクトではない（なお例 3.4 参照）．このことについてさらにくわしく見るために‘点列の集積点’の概念を用いることができる．

§3.3 Lindelöf 空間，点列の集積点

§3.1 でも述べたように $\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない．しかし $\boldsymbol{R}$ の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ は可算部分被覆を持つ．このことを示すために $\boldsymbol{R}$ が可算開基を持つこと（たとえば $U_{n^{-1}}(a)$（ただし $a\in\boldsymbol{Q}$, $n\in\boldsymbol{N}$, $U_{n^{-1}}(a)$ は a の n^{-1} 近傍）の全体）を使うことができる．実際 $\{U_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}$ の可算開基，$\mathcal{U}$ を $\boldsymbol{R}$ の開被覆とするとき $A=$

$\{n\in\boldsymbol{N}\mid\exists U(U\in\mathcal{U}\wedge U\supset U_n)\}$ とおこう．A は $\boldsymbol{N}$ の部分集合だから可算集合である．A の元 k が与えられたとき，$\mathcal{U}$ の元 U で $U\supset U_k$ を満たすものを一つ選んでそれを V_k と書こう(選出公理を用いた)．$\mathcal{V}$ をこれら V_k $(k\in A)$ 全体から成る集合とすると，$\mathcal{V}$ は $\boldsymbol{R}$ の開被覆となることがわかる．実際 $x\in\boldsymbol{R}$, $x\in U$ $(U\in\mathcal{U})$ とすると $x\in U_k\subset U$ を満たす開基の元 U_k は必ずあり，ここで $V_k\supset U_k\ni x$ となるから $V_k\ni x$．こうして $\mathcal{U}$ の可算部分被覆 $\mathcal{V}$ が得られた．

位相空間 X はその任意の開被覆が可算部分被覆を持つとき **Lindelöf 空間**と呼ばれる．$\boldsymbol{R}$ は Lindelöf 空間である．またコンパクト空間はもちろん Lindelöf 空間である．さらに上の説明から明らかであるようにつぎの定理が成り立つ．

定理 3.5　第2可算公理を満たす位相空間は Lindelöf 空間である．——

上の定理の逆は成り立たない．コンパクトでも第2可算公理を満たさない位相空間もある(たとえば例 2.26 であげた I^I はコンパクトだが第1可算公理も第2可算公理も満たさない——定理 2.15, Tychonoff の定理参照)．しかし距離空間に関してはつぎの定理が成り立つ．

定理 3.6　X を距離空間とするとつぎの (i), (ii), (iii) は互いに同値である．

(i)　X は第2可算公理を満たす

(ii)　X は可分である

(iii)　X は Lindelöf 空間である．

証明　(i) と (ii) が同値であることは容易にわかる(問題 2.13)．(i) から (iii) が導かれることについてはすでに述べた(定理 3.5)．(iii) から (ii) が導かれることを示そう．自然数 n $(\neq 0)$ を一つ固定し，X の元 x の n^{-1} 近傍 $U_{n^{-1}}(x)$ 全体から成る集合を $\mathcal{U}_n$ と書けば，$\mathcal{U}_n$ は X の開被覆だから (iii) により $\mathcal{U}_n$ の可算部分被覆 $\mathcal{V}_n=\{U_{n^{-1}}(x_{n,1}), U_{n^{-1}}(x_{n,2}), \cdots\}$ が存在する．こうして X の可算集合 $\{x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots\}=S_n$ が各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して得られる．$S=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}S_n$ とおけば $\bar{S}=X$ となる！　実際 x を X の任意の元，$\varepsilon>0$ とするとき自然数 n を $n^{-1}<\varepsilon$ となるように選び，$x\in U_{n^{-1}}(x_{n,k})$ を満たすような $x_{n,k}$ をとれば，$x_{n,k}\in U_{n^{-1}}(x)\subset U_\varepsilon(x)$ が成り立つ！　こうして可算集合 S が X の中で到る所で稠密となることが示された．▌

ここで可分ではない距離空間の例をあげておこう．

例 3.3　Λ $(\neq\phi)$ を集合，$M(\Lambda)$ を $\boldsymbol{R}^\Lambda$ の元 f で Λ の有限個の元を除いて $f(\lambda)$

$=0$ となるようなもの全体から成る集合，すなわち

$$M(\Lambda)=\{f\in \boldsymbol{R}^{\Lambda}\,|\,f^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})\text{ は有限集合}\}$$

とする．$M(\Lambda)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となるが，$M(\Lambda)$ の元 f, g に対して

$$B(f,g)=\sum_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)g(\lambda)$$

とおけば B はベクトル空間 $M(\Lambda)$ 上の対称双1次形式となり，B の同伴2次形式 Q は正の定符号形式となる．d を Q によって定まる $M(\Lambda)$ の計量としよう $(d(f,g)^2=\sum(f(\lambda)-g(\lambda))^2)$．さて $M(\Lambda)$ が可分であるとし，$S=\{f_1, f_2, \cdots\}$ を $M(\Lambda)$ の中で到る所で稠密な可算集合としよう．また Λ の各元 λ に対して $M(\Lambda)$ の元 χ_λ を

$$\chi_\lambda(\mu)=\begin{cases}1 & (\mu=\lambda)\\ 0 & (\mu\neq\lambda)\end{cases}$$

とおいて定める．$\mu\in\Lambda$ に対して χ_μ と f_n の距離は

$$d(\chi_\mu, f_n)=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(\chi_\mu(\lambda)-f_n(\lambda))^2\right)^{1/2}$$
$$=\left(\sum_{\lambda\neq\mu}f_n(\lambda)^2+(1-f_n(\mu))^2\right)^{1/2}$$

で与えられる．いま ε を十分0に近い正の実数（たとえば $0<\varepsilon<1/2$）とし χ_μ の ε 近傍に属する S の元 f_n を考えると，$f_n(\lambda)^2<\varepsilon^2\ (\lambda\neq\mu)$，$(1-f_n(\mu))^2<\varepsilon^2$ となるから，このような ε を一つ固定し，$U_\varepsilon(\chi_\mu)$ に含まれる S の元を各 χ_μ に対して一つずつ選んで $f_{n(\mu)}$ とおけば，$\mu\neq\lambda$ のとき $f_{n(\mu)}\neq f_{n(\lambda)}$ となる．こうして Λ の元 λ に $\boldsymbol{N}$ の元 $n(\lambda)$ を対応させる単射 φ が得られる．したがってこのとき Λ は可算集合でなければならない．ゆえに Λ が非可算であるときには $M(\Lambda)$ は可分ではない（したがって $M(\Lambda)$ は Lindelöf 空間ではない）距離空間となる．——

Lindelöf 空間の概念は点列とその‘集積点’という概念と関連して用いられる．一般に X を位相空間，$(\Lambda, \prec)$ $(\Lambda\neq\emptyset)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の有向点列とするとき，X の元 x が $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**集積点** (cluster point) であるとは，x の任意の近傍 U と Λ の任意の元 λ を選んだとき Λ の元 μ があり，$\lambda\prec\mu\wedge x_\mu\in U$ が成り立つときにいう．たとえば $X=\boldsymbol{R}$，Λ として $\boldsymbol{N}$，$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=0$，$x_4=1$，…，$x_{2n+1}=0$，$x_{2n}=1$，… のように与えれば 0, 1 はともに $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の集積点となる．またこのとき $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の‘部分点列’ $(x_{2n+1})_{n\in\boldsymbol{N}}$，$(x_{2n})_{n\in\boldsymbol{N}}$ はそ

れぞれ 0, 1 に収束する.

一般に位相空間 X の有向点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\mu)_{\mu\in M}$ が与えられたとき M が Λ の部分順序集合であり $\mu\in M\ (\subset\Lambda)$ に対し $y_\mu=x_\mu$, さらに条件

$$(*)\qquad \forall\lambda[\lambda\in\Lambda\Longrightarrow\exists\mu(\mu\in M\wedge\lambda\prec\mu)]$$

が満たされているならば——$(*)$ が満たされるとき M は Λ と**共終** (cofinal) な有向集合であるという——$(y_\mu)_{\mu\in M}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分有向点列** (partial directed sequence) であるといわれる. 特に $\Lambda=\boldsymbol{N}$ のとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ の部分有向点列を単に $(x_\lambda)_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ の**部分点列**と呼ぶ.

問題 3.2　X を位相空間, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をその有向点列とする. このときつぎの (i), (ii) を証明せよ.

(i)　$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点列が X の元 x に収束すれば, x は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の集積点である.

(ii)　X が距離空間, $\Lambda=\boldsymbol{N}$ のとき, $(x_\lambda)_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ が集積点を持つことと $(x_\lambda)_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ の適当な部分点列が収束することとは同値である.

定理 3.7　X を第1可算公理を満たす位相空間とし, $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列とすると, $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が集積点を持つことと $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が収束する部分点列を持つこととは同値である.

証明　$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が集積点 y を持つとき $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の部分点列で y に収束するものがあることを示せば十分である. $\mathfrak{N}_0(y)$ を y の可算基本近傍系としその元を $U_1, U_2, \cdots$ と記そう. いま $n\in\boldsymbol{N}$ に対し $V_n=\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ とおけば, V_n はまた y の近傍であり $V_n\supset V_{n+1}$. さて任意の $n, m\in\boldsymbol{N}$ に対し, $S_{n,m}=\{x\in V_m\mid\exists k(k\in\boldsymbol{N}\wedge n<k\wedge x=x_k)\}\neq\phi$ だから $S_{n,m}\ (n, m\in\boldsymbol{N})$ 全体から成る集合 $\mathcal{S}$ の選出関数 φ を一つ与えることができる. (すなわち各 $S_{n,m}$ からその元 $\varphi(S_{n,m})$ を一つ選ぶ方法を与えておくのである.) さて $y_1=\varphi(S_{1,1})=x_{n_1}$ とし $y_2=\varphi(S_{n_1,2})=x_{n_2}$ とおき以下 $y_k=x_{n_k}$ のとき $y_{k+1}=\varphi(S_{n_k,k+1})$ とおいて点列 $(y_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を定める. $(y_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は明らかに y に収束する $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の部分点列である. ▮

定理 3.8　Lindelöf 空間 X がコンパクトであるための必要十分条件は, X の任意の点列が集積点を持つことである.

証明　$\mathcal{U}$ を X の開被覆とし, X の任意の点列が集積点を持つと仮定して $\mathcal{U}$ の有限部分被覆があることを示そう. X は Lindelöf 空間だから, $\mathcal{U}$ は可算集合で

あると仮定してよい．$\mathcal{U}$ の元を $U_1, U_2, U_3, \cdots$ と記し，$\mathcal{U}$ が有限部分被覆を持たないと仮定して矛盾を導こう．自然数 n に対して $X-\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ は空集合ではないと仮定するのだから，この集合に含まれる元を一つ選んで x_n としよう．こうして X の点列 $(x_n)_{n\in N}$ が得られる．y を $(x_n)_{n\in N}$ の集積点とすれば，$y\in U_k$ となる $k\in N$ がある．U_k は y の近傍だから $n>k$ となる自然数 n があって $x_n\in U_k$ となるはずであるが，$x_n\in X-\bigcup_{i=1}^{n} U_i$，ゆえに $x_n\notin U_k$ となって矛盾が導かれた．

逆に X をコンパクトであると仮定し，$(x_n)_{n\in N}$ を X の点列としよう．$S_n=\{x\in X\,|\,\exists k(k\in N\wedge n<k\wedge x=x_k)\}$ とおくと $S_n\ (n\in N)$ 全体から成る集合 $\mathcal{S}$ は有限交叉性を持つ．ゆえに $\bigcap_{n\in N}\bar{S}_n\neq\phi$．$y\in\bigcap_{n\in N}\bar{S}_n$ とすれば容易にわかるように y は $(x_n)_{n\in N}$ の集積点となる．▌

系 1　コンパクト位相空間の任意の点列は集積点を持つ．

系 2　X を第2可算公理を満たす位相空間とするとつぎの (i), (ii), (iii) は互いに同値である．

（i）　X の任意の点列は集積点を持つ

（ii）　X の任意の点列は収束する部分点列を持つ

(iii)　X はコンパクトである．——

上の定理の系1を用いると $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間の有界閉集合でコンパクトではないものの例が得られる．

例 3.4　$\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間とみなし $S=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\boldsymbol{Q}$ とおくと，S は $\boldsymbol{Q}$ の有界閉集合であるが，S の点列 $(x_n)_{n\in N}$ で $-\sqrt{2}<x_n<\sqrt{2}$，$x_n<x_{n+1}$，しかも $\sqrt{2}-x_n<2^{-n}$ を満たすようなものをとれば $(x_n)_{n\in N}$ は S の中に集積点を持たない．したがって S はコンパクトではない．

§3.4　パラコンパクト空間，局所コンパクト空間

位相空間 X の被覆 $\mathcal{U}$ としてはいろいろなものがとれる．$\mathcal{U}=\{X\}$ も被覆であるし，$\mathcal{U}=\mathcal{P}(X)$ も X の被覆である．$\mathcal{U},\mathcal{V}$ がともに X の被覆で，$\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ となるとき $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の部分被覆というのであった．いま，$\mathcal{U},\mathcal{V}$ を X の被覆とし，$\mathcal{V}$ の任意の元 V に対して $\mathcal{U}$ の元 U があり，$V\subset U$ が成り立つならば $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の**細分** (refinement) と呼ばれる．$\mathcal{U}$ の部分被覆は $\mathcal{U}$ の細分である．

たとえば $\boldsymbol{R}$ の被覆 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ として

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}) \mid \exists n \exists k (n \in \boldsymbol{Z} \wedge k \in \boldsymbol{N} \wedge 3 \leqq k \wedge U = (n, n+k))\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}) \mid \exists n (n \in \boldsymbol{Z} \wedge U = (n, n+2))\}$$

をとると，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分である．この場合 $\boldsymbol{R}$ の被覆としては $\mathcal{V}$ の方が $\mathcal{U}$ よりも‘簡明’なものであると思われよう．実際 $\boldsymbol{R}$ の任意の元 x をとったとき，x を含む $\mathcal{U}$ の元は無限にあるが，x を含む $\mathcal{V}$ の元は1個もしくは2個しかない．また x の‘小さな’近傍 W をとれば，$W \cap V \neq \phi$ となるような $\mathcal{V}$ の元 V は有限個しかない．

一般に位相空間 X の被覆 $\mathcal{U}$ が与えられたとき，X の任意の元 x に対して x の近傍 W をとって，$W \cap U \neq \phi$ となるような $\mathcal{U}$ の元 U が有限個しかないようにできるならば，$\mathcal{U}$ は X の**局所有限** (locally finite) な被覆と呼ばれる．X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し局所有限な開被覆 $\mathcal{V}$ で $\mathcal{U}$ の細分となるものが存在するとき，X は**パラコンパクト** (paracompact) な空間であるといわれる．コンパクト空間はパラコンパクトである．またパラコンパクト空間 X の閉集合は X の部分空間としてパラコンパクトになる(読者自ら確かめられたい)．

定理 3.9 パラコンパクト Hausdorff 空間は T_4 空間である．

証明 X をパラコンパクト Hausdorff 空間とし，まず X が T_3 空間となることを示そう．$x \in X$, S を X の閉集合で x を含まないものとするとき X の開集合 U, V があり $U \ni x$, $V \supset S$, $U \cap V = \phi$ となることを示せばよい．X の任意の元 y で x とは異なるものをとったとき，X が Hausdorff 空間だから x と y の開近傍 $U_{x,y}$, V_y をとり $U_{x,y} \cap V_y = \phi$ を成り立たせることができる．さらにこのとき $U_{x,y} \subset S^c$ としてよい．さてこのようにして X の元 y $(\neq x)$ をすべてとったときに得られる開集合 $U_{x,y}$, V_y 全体から成る集合 $\mathcal{U}$ は X の開被覆となる．$\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の局所有限な細分で開集合から成るものとしよう．$\mathcal{V}_S = \{W \in \mathcal{V} \mid W \cap S \neq \phi\}$ とおき $V = \bigcup \mathcal{V}_S$ とすれば V は明らかに S を部分集合として含む X の開集合である．$x \notin \bar{V}$ を示そう．そのため $W \in \mathcal{V}_S$ とすれば W を部分集合として含む $\mathcal{U}$ の元 $U_{x,y}$ または V_z $(y, z \in X)$ が存在するが，$W \cap S \neq \phi$ なので $W \subset U_{x,y}$ とはなり得ない．ゆえに $W \subset V_z$ $(z \neq x)$，したがって $U_{x,z} \cap W = \phi$．こうして $\mathcal{V}_S$ の任意の元 W をとったとき x の開近傍 $U_{x,z}$ があって $U_{x,z} \cap W = \phi$ となることがわかった．一方，$\mathcal{V}$ が局所有限であることから容易にわかるように $\bar{V} = \bigcup_{W \in \mathcal{V}_S} \bar{W}$ となる(読者自ら確かめられたい)．ゆえに $x \notin \bar{V}$．したがって $U = \bar{V}^c$ とすれば

$x\in U$, $S\subset V$, $U\cap V=\phi$ となる．

さて，X が T_3 空間となることを用いて，X が T_4 空間となることを示そう．E, F を X の閉集合で $E\cap F=\phi$ となっているものとし，E, F が X の開集合によって分離されることを示そう．E または F が空集合ならば問題はないから，E, F がともに空集合とは異なる場合について考える．$x\in E$ とすると $x\notin F$ だから X が T_3 空間であることにより X の開集合 U_x, V_x があり $x\in U_x$, $F\subset V_x$, $U_x\cap V_x=\phi$ となる．x を E の中で動かしたときに得られる U_x, V_x の全体および $(E\cup F)^c$ から成る集合 $\mathcal{U}'$ は X の開被覆になるから $\mathcal{U}'$ の局所有限な細分で X の開被覆となる $\mathcal{V}'$ が存在する．前と同様に $\mathcal{V}'_E=\{W'\in\mathcal{V}' \mid W'\cap E\neq\phi\}$ とおき $V'=\bigcup\mathcal{V}'_E$ とおけば $V'\supset E$, また V' は X の開集合となる．また $\mathcal{V}'_E$ の任意の元 W' をとると，前とまったく同様な論法で $W'\subset U_x$ となるような E の元 x があり，したがってこのとき $W'\cap V_x=\phi$ $(V_x\supset F)$．ゆえに $F\subset\overline{W}'^c$．これが $\mathcal{V}'_E$ の任意の元 W' について成り立ち $\bar{V}'=\bigcup_{W'\in\mathcal{V}'_E}\overline{W}'$ となるから $F\subset\bar{V}'^c$．$U'=\bar{V}'^c$ とおけば $U'\supset F$, $V'\supset E$, $U'\cap V'=\phi$. ▌

系1 コンパクト Hausdorff 空間は T_4 空間である．

系2 コンパクト Hausdorff 空間 X が計量化可能であるための必要十分条件は，X が第2可算公理を満たすことである．

証明 コンパクトな距離空間は第2可算公理を満たす（定理3.6）．また第2可算公理を満たす T_4 空間は計量化可能である（定理2.14）．▌

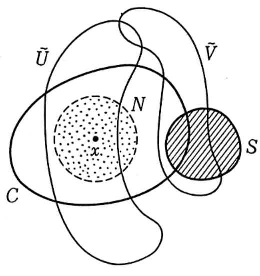
$\boldsymbol{R}$ はパラコンパクトだろうか．$\boldsymbol{R}$ はコンパクトではないが，その任意の元 x はコンパクトな近傍を持つ．実はこの事実に基づいて $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^n$ などがパラコンパクトであることが示されるのだが，ここで一般的な定義を与えよう．位相空間 X の部分集合 S は，$\bar{S}$ がコンパクトであるとき X の中で**相対コンパクト** (relatively compact) であるといわれる．X の任意の元 x が X の中で相対コンパクトな開集合 U に含まれるとき，X は**局所コンパクト** (locally compact) であるといわれる．X が局所コンパクトであればその各元 x はコンパクトな近傍を持つ．逆に，位相空間 X の任意の元 x がコンパクトな閉近傍を持てば，X は局所コンパクトである．$\boldsymbol{R}^n$ は局所コンパクトである．また，コンパクト空間はいうまでもなく局所コンパクトである．

一般に Hausdorff 空間 X の各元 x が $\boldsymbol{R}^n$ と同位相な近傍を持てば X は n 次

元**多様体** (manifold) と呼ばれる．n 次元球面 S^n (例 1.8)，n 次元トーラス $\boldsymbol{T}^n$ (例 2.21) はそれぞれ n 次元多様体である．また $\boldsymbol{R}^n$，または $\boldsymbol{R}^n$ の任意の開集合 S ($\neq\phi$) も n 次元多様体である．n 次元多様体は局所コンパクトである．実は第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトになる (ゆえに $\boldsymbol{R}^n$ はパラコンパクトである)．このことを示す前に，局所コンパクト Hausdorff 空間についてもう少し見ておこう．

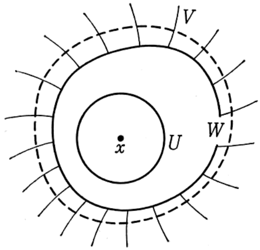
定理 3.10　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とすると X は T_3 空間であり，X の各元 x の任意の近傍は x のコンパクトな近傍を部分集合として含む．

証明　X が T_3 空間であることを示すためには，X が正則空間であること，すなわち X の任意の元 x と x を含まない X の閉集合 S が与えられたとき，X の開集合 U, V があり $U\ni x$，$V\supset S$，$U\cap V=\phi$ が成り立つことを示せば十分である．いま C を x のコンパクトな近傍としよう．C は X の部分空間としてコンパクト Hausdorff 空間だから正規空間となる．一方，C は x の開近傍 N を部分集合として含む．さて C の正規性により，x と閉集合 $C\cap S$ は開集合によって分離されるから，X の開集合 $\tilde{U}, \tilde{V}$ があって $\tilde{U}\ni x$，$\tilde{V}\supset C\cap S$，$\tilde{U}\cap\tilde{V}\cap C=\phi$ が満



たされる．ここで $U=\tilde{U}\cap N$ とおき，$V=\tilde{V}\cup C^c$ ($C^c=X-C$) とおけば U, V は X の開集合で $U\ni x$，$V\supset S$，$U\cap V=\phi$ となる！

さて W を x の任意の近傍とし，W が x のコンパクトな近傍を部分集合として含むことを示そう．W は x の開近傍を部分集合として含むので，初めから W を x の開近傍と仮定して話をすすめればよい．$S=W^c$ とおけば S は X の閉集合で x を含まないから，X の正則性により開集合 U, V があり $U\ni x$，$V\supset S$，U



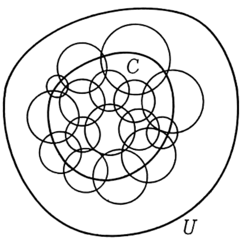
$\cap V=\phi$ が成り立つ．したがって $\bar{U}\subset V^c\subset W$．ここで $W_0=\bar{U}\cap C$ (C は初めにとった x のコンパクトな近傍) とおけば W_0 は明らかに x のコンパクトな近傍で $W_0\subset W$ が成り立つ．∎

定理 3.11 X を局所コンパクト Hausdorff 空間，C を X のコンパクト部分集合，U を X の開集合で $U\supset C$ を満たすものとすると，

(i) X の相対コンパクトな開集合 V が存在して $C\subset V\subset \bar{V}\subset U$ となる

(ii) 連続写像 $f: X\to I$ ($I=[0,1]$) があって $C\subset f^{-1}(0)$，$V^c\subset f^{-1}(1)$ を満たす．

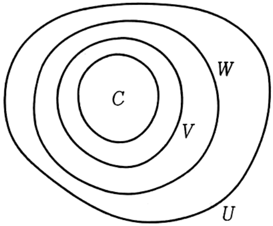
証明 (i) $C\neq\phi$ の場合を考えればよい．$x\in C$ に対して x の開近傍 V_x を適当に選べば $\bar{V}_x\subset U$ となることは X の正則性から導かれる．またここで $\bar{V}_x$ はコンパクトと仮定してよい．$\mathcal{U}$ としてこのような V_x ($x\in C$) 全体から成る集合をとれば $\mathcal{U}$ は C の開被覆だから $\mathcal{U}$ の有限部分被覆 $\{V_{x_1},\cdots,V_{x_n}\}$ が存在する．



$V=\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ とおけば明らかに $C\subset V\subset \bar{V}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_{x_i}\subset U$，また $\bar{V}$ はコンパクトである．

(ii) (i) の操作をもう一度 $\bar{V}$ と U に関してくり返すと相対コンパクトな開集

合 W が得られ $\bar{V}\subset W\subset\bar{W}\subset U$ となる．$\bar{W}$ はコンパクト Hausdorff 空間だから正規空間であり，$C, V^c\cap\bar{W}$ は $\bar{W}$ の閉集合で互いに共通部分を持たない．した



がって Uryson の補題により $\bar{W}$ から I への連続写像 $\tilde{f}$ があり $C\subset\tilde{f}^{-1}(0)$，$V^c\cap\bar{W}\subset\tilde{f}^{-1}(1)$ が成り立つ．いま X から I への写像 f を $f|_{\bar{W}}=\tilde{f}$，さらに $\bar{W}^c$ の任意の元 x に対して $f(x)=1$ を満たすように定めれば容易に確かめられるように，f は連続写像となり (ii) の条件が満たされる．▌

例 1.8 に示されたように，$\boldsymbol{R}^2$ は 2 次元球面 S^2 から 1 点を取り除いた空間と同位相である．このことから，平面 $\boldsymbol{R}^2$ に‘無限遠点’∞ を付け加え，$\boldsymbol{R}^2\cup\{\infty\}$ に適当な位相を導入すれば $\boldsymbol{R}^2\cup\{\infty\}$ は S^2 と同位相になり，したがってコンパクトになるであろうと推測されよう．ここで $\boldsymbol{R}^2$ は $\boldsymbol{R}^2\cup\{\infty\}$ の部分空間となり，∞ を含む $\boldsymbol{R}^2\cup\{\infty\}$ の開集合 U は $U=\{\infty\}\cup V$ (ただし V は $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト集合 C の $\boldsymbol{R}^2$ における補集合 $V=\boldsymbol{R}^2-C$) と書けるであろうことも推測されよう．このような考え方はより一般的な場合にも適用される．X を位相空間，$\mathcal{O}$ を X の位相すなわち X の開集合全体から成る集合としよう．X に‘1 点を付け加えて’新しい位相空間 X^* を作りたい．‘付け加える 1 点’は X に含まれない元ならば何でもよいのであるが，ここでは $X^*=X\cup\{X\}$ とおこう．(集合論の正則性の公理により $X\not\ni X$.) さらに

$$\mathcal{O}^*=\mathcal{O}\cup\{U\in\mathcal{P}(X^*)\mid\exists C(C\text{ は }X\text{ のコンパクト閉集合}\wedge U=\{X\}\cup(X-C))\}$$

とおくと $\mathcal{O}^*$ は開集合の公理を満たす (読者自ら確かめられたい)．こうして位相空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ が得られる．

定理 3.12 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ と上の $(X^*,\mathcal{O}^*)$ についてつぎの (i)-(iv) が成り立つ．

(i) X は X^* の部分空間である

(ii) X^* はコンパクトである

(iii) X がコンパクトでなければ X は X^* の到る所で稠密

(iv) X^* は Hausdorff 空間 $\Leftrightarrow$ X は局所コンパクトな Hausdorff 空間.

問題 3.3 上の定理を証明せよ. ——

定理 3.12 に述べられている $(X^*, \mathcal{O}^*)$ (あるいは X^*) を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ (あるいは X) の **Alexandroff のコンパクト化** (Alexandroff compactification) または **1点コンパクト化** (one-point compactification) と呼ぶ. S^2 は $(\boldsymbol{R}^2)^*$ と同位相である.

例 3.5 α を順序数とし $<$ を α の元の間の順序関係としよう. §2.10 の最後の部分で述べたように, α は順序位相に関して Hausdorff 空間となる.

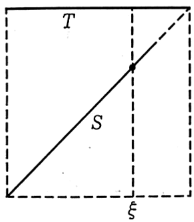
α は局所コンパクト空間となることを示そう. そのためには $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \lneqq \gamma$ のとき $[\beta, \gamma] = \{\xi \in \alpha \mid \beta < \xi \wedge \xi < \gamma\}$ がコンパクトになることを示せば十分である. $\mathcal{U}$ を $[\beta, \gamma]$ の開被覆とし, $[\beta, \gamma]$ の元 ξ で $[\xi, \gamma]$ が $\mathcal{U}$ の有限部分集合で覆われるようなものを考え, そのような ξ の全体を C と書こう. $\gamma \in C$ だから $C \neq \phi$ である. $\xi_0 = \min C$ とおき $\beta \lneqq \xi_0$ と仮定して矛盾を導こう. まず ξ_0 が直前の元 η を持つならば, $\beta < \eta \lneqq \eta^+ = \xi_0$ だから $\eta \in [\beta, \gamma]$, ゆえに $\mathcal{U}$ の元で η を含むものがとれる. したがって $[\eta, \gamma]$ は $\mathcal{U}$ の有限部分集合で覆われることになり $\eta \in C$ となるが, これは $\xi_0 = \min C$ と矛盾する. したがって ξ_0 は極限数となる. ξ_0 を含む $\mathcal{U}$ の元 U を一つとろう. U は ξ_0 を含む或る区間 $(\eta_1, \eta_2) = s'(\eta_1) \cap s(\eta_2)$ を部分集合として含むから, $\eta_1 \lneqq \xi_0 \lneqq \eta_2$ となる. ところが ξ_0 は直前の元を持たないから $\eta_1{}^+ \lneqq \xi_0$, ゆえに $\eta_1{}^+ \in (\eta_1, \eta_2) \subset U$. こうして $\eta_1{}^+$ も C の元となるが, これは $\xi_0 = \min C$ に矛盾する！

順序数 α は, したがって局所コンパクト Hausdorff 空間であり, $[\beta, \gamma]$ ($\beta < \gamma < \alpha$) はコンパクトである. 特に α が孤立順序数で $\alpha = \beta^+$ となるとき, $\alpha = [0, \beta]$ だから α はコンパクトである. また一般に α^+ は α の1点コンパクト化に他ならない！ (読者自ら確かめられたい.)

特に ω は離散空間でコンパクトではないが, ω^+ は離散空間ではなく, コンパクトである. ——

例 3.6 $\aleph_1$ を '2番目に大きい無限基数' とする. $\aleph_1$ が T_4 空間となることは

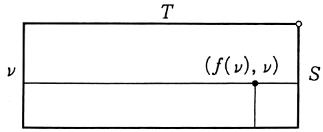
例2.28で示された．$\aleph_1{}^+$ は例3.5からわかるようにコンパクト Hausdorff 空間だからやはり T_4 空間である．($\aleph_1{}^+$ が T_4 空間となることは例2.28に述べた論法によってもわかる.) ところが直積空間 $\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ は T_4 空間ではない！(したがって $\aleph_1{}^+$ は計量化不可能である．実際 $\aleph_1{}^+$ が距離空間ならばその部分空間である $\aleph_1$ も距離空間となり，$\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ もまた距離空間したがって T_4 空間となって矛盾が生じる.) $\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ が T_4 空間ではないことを示すために $\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ の部分集合 S, T として $S=\{(\xi,\xi)\in\aleph_1\times\aleph_1{}^+ \mid \xi\in\aleph_1\}$，$T=\{(\xi,\aleph_1)\in\aleph_1\times\aleph_1{}^+ \mid \xi\in\aleph_1\}$ をとろう．$\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ から $\aleph_1, \aleph_1{}^+$ への標準的射影を p_1, p_2 と書けば，



$T=p_2{}^{-1}(\aleph_1)$ である．$S\cap T=\phi$，また S^c, T^c は明らかに開集合なので S, T はともに閉集合である．S, T が開集合によって分離されないことを示せば，$\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ が T_4 空間ではないことが示される．$\aleph_1\times\aleph_1{}^+$ の開集合 U, V があり $U\supset S$，$V\supset T$，$U\cap V=\phi$ が成り立つと仮定して矛盾を導こう．いま $\aleph_1$ の任意の元 ξ をとり $A_\xi=p_1{}^{-1}(\xi)$ $(\subset\aleph_1\times\aleph_1{}^+)$ とおこう．$\aleph_1$ は直前の元を持たないから $A_\xi\cap V$ には (ξ,η) $(\eta\in\aleph_1,\ \xi\precneqq\eta)$ という形の元が含まれる．ここで $B_\xi=\{\eta\in\aleph_1 \mid \xi\precneqq\eta\wedge(\xi,\eta)\notin U\}$ とおけば上に述べたことにより $B_\xi\neq\phi$．ここで $\aleph_1$ の元 ξ に $\aleph_1$ の元 $\min B_\xi$ を対応させる写像を f と書けば，$\xi\precneqq f(\xi)$ が各 ξ について成り立つ．いま $\aleph_1$ の元 ξ を一つとって $\xi_0=\xi$ とおき，$\xi_1=f(\xi_0)$，$\xi_2=f(\xi_1)$，…，$\xi_{n+1}=f(\xi_n)$ $(n\in\omega)$ とおけば $\aleph_1$ の元の列 $(\xi_n)_{n\in\omega}$，$(f(\xi_n))_{n\in\omega}$ が得られ，$\xi_n\prec f(\xi_n)\prec\xi_{n+1}$ $(n\in\omega)$ が成り立つ．ここで§2.10で述べた Interlacing Lemma を用いれば $\sup\{\xi_n\}_{n\in\omega}=\sup\{f(\xi_n)\}_{n\in\omega}\in\aleph_1$ である．$\eta=\sup\{\xi_n\}_{n\in\omega}$ とおけば (η,η) は f のグラフの触点となる．一方 $(\eta,\eta)\in S\subset U$，ゆえに十分大きい自然数 n をとると $(\xi_n, f(\xi_n))\in U$ となるが，これは $f(\xi_n)$ の定義に矛盾する．

例 3.7 ω^+ と $\aleph_1{}^+$ はともにコンパクト Hausdorff 空間であるから直積空間

$\aleph_1{}^+\times\omega^+$ もコンパクト Hausdorff 空間したがって T_4 空間である．$\aleph_1{}^+\times\omega^+$ は **Tychonoff 板** (Tychonoff plank) として知られているが，この‘板’から‘右上の端点’ $(\aleph_1, \omega)$ を除いて得られる部分空間 $X=\aleph_1{}^+\times\omega^+-\{(\aleph_1, \omega)\}$ は T_4 空間で



はない．実際 X の部分集合 S, T として $S=\{x\in X\mid\exists n(n\in\omega\wedge x=(\aleph_1, n))\}$，$T=\{y\in X\mid\exists\xi(\xi\in\aleph_1\wedge y=(\xi, \omega))\}$ をとれば，S, T は明らかに X の閉集合であり $S\cap T=\phi$．ここで X の開集合 U, V があって $U\supset S$, $V\supset T$，しかも $U\cap V=\phi$ が成り立つと仮定して矛盾を導けば，X が T_4 空間ではないことが示される．いま上のような仮定のもとに $\nu\in\omega$ をとり，$A_\nu=\{\xi\in\aleph_1{}^+\mid\forall\eta(\eta\in\aleph_1{}^+\wedge\xi\lneqq\eta\Longrightarrow(\eta, \nu)\in U)\}$ とおけば $A_\nu\neq\phi$，また $\aleph_1$ が極限数であることから容易にわかるように，$\min A_\nu\in\aleph_1$．ここで $f(\nu)=\min A_\nu$ とおけば，f は ω から $\aleph_1$ への写像となる．こうして可算集合 ω の各元 ν に対して可算順序数 $f(\nu)$ が対応する．ゆえに $\sup\{f(\nu)\}_{\nu\in\omega}=\xi_0$ も可算集合であり $\xi_0\in\aleph_1$ となる (第 I 部 §6.4 参照)．したがって ω の任意の元 ν に対して $(\xi_0{}^+, \nu)\in U$ (ξ_0 は可算集合だから $\xi_0{}^+$ も可算，ゆえに $\xi_0{}^+\lneqq\aleph_1$) となる．さて $(\xi_0{}^+, \omega)\in T\subset V$ だから ν を十分大きくとれば $(\xi_0{}^+, \nu)\in V$．ところが上に述べたように $(\xi_0{}^+, \nu)\in U$ だからこれは $U\cap V=\phi$ と矛盾する！――

上の例からわかるように，$\aleph_1\times\aleph_1{}^+$，$\aleph_1{}^+\times\omega^+-\{(\aleph_1, \omega)\}$ は局所コンパクト Hausdorff 空間だが，T_4 空間ではないので，ともにパラコンパクトではない．

さてつぎの定理により第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトであることがわかる．

定理 3.13　X を第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$\mathcal{U}$ を X の開被覆とすると $\mathcal{U}$ の局所有限な細分 $\mathcal{V}$ で X の開被覆となるものがある．さらにこのような $\mathcal{V}$ を適当に選べば，$\mathcal{V}$ の任意の元 V は相対コンパクト，しかも V に対して $\mathcal{U}$ の元 U があって $\bar{V}\subset U$ が満たされるようにできる．

証明　X の元 x と，$\mathcal{U}$ の元 U をとり $x\in U$ としよう．X は局所コンパクト

Hausdorff 空間だから x の相対コンパクトな近傍 W_x をとり $\overline{W}_x \subset U$ が成り立つようにできる．$\widetilde{\mathscr{W}}$ をこのような $W_x\ (x \in X)$ 全体から成る集合としよう．$\widetilde{\mathscr{W}}$ は X の開被覆となるが，X は第2可算公理を満たすので Lindelöf 空間となり(定理 3.5)，したがって $\widetilde{\mathscr{W}}$ は可算部分被覆 $\mathscr{W}=\{W_n\}_{n\in N}$ を持つ．($\mathscr{W}$ が有限集合 $\{W_1, \cdots, W_n\}$ の場合は $W_n=W_{n+1}=W_{n+2}=\cdots=W_{n+k}\ (k \in N)$ とおく.) $\mathscr{W}$ は $\mathscr{U}$ の細分である．さて C を X のコンパクト集合とすれば，C は $\mathscr{W}$ の有限個の元によって覆われるから $k(C)=\min\left\{n \in N \,\middle|\, C \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i\right\}$ が確定する．$\varphi(C)=\bigcup_{i=1}^{k(C)} \overline{W}_i$ とおけば，$\varphi(C)$ はまたコンパクト集合である．ここで $C_1=\overline{W}_1$，$C_2=\varphi(C_1) \cup \overline{W}_2$，一般に $C_{n+1}=\varphi(C_n) \cup \overline{W}_{n+1}\ (n \in N)$ とおいてコンパクト集合の列が得られる．明らかに $X=\bigcup_{n \in N} C_n$．また $k_n=k(C_n)$ とおけば $C_n \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} W_i$ となる．さらに X の任意のコンパクト集合 C に対して十分大きな自然数 n をとると $C \subset C_n$ となる．さて，X の開集合 $V_i\ (i \in N)$ を $V_1=W_1$，$1 \leqq i \leqq k_1$ を満たす i に対しては $V_i=W_i$，$k_1<j \leqq k_2$ に対しては $V_j=W_j-C_1$，一般に $k_n<k \leqq k_{n+1}$ を満たす k に対して $V_k=W_k-C_n$ とおいて定める．$V_n \subset W_n\ (n \in N)$ となるが，さらに $\bigcup_{k=1}^{k_n} V_k=\bigcup_{k=1}^{k_n} W_k$ が成り立つ．実際 $k_n=k_1$ のときには明らか．また k_n については上式が成り立つとし，k_{n+1} についても成り立つことを示そう．$k_n<k \leqq k_{n+1}$ のとき $V_k=W_k-C_n$，$C_n \subset \bigcup_{k=1}^{k_n} W_k=\bigcup_{k=1}^{k_n} V_k$ だから明らかに $\bigcup_{k=1}^{k_{n+1}} V_k=\bigcup_{k=1}^{k_{n+1}} W_k$．したがって V_k 全体 $(k \in N)$ から成る集合 $\mathscr{V}$ は X の開被覆となり，$\mathscr{W}$ の細分，ゆえに $\mathscr{U}$ の細分となる．$\mathscr{V}$ の任意の元 V について $\mathscr{U}$ の元 U があり $\bar{V} \subset U$ が満たされることも明らかである．$\mathscr{V}$ が局所有限であることを示そう．X の任意の元 x をとり x の相対コンパクトな近傍 U_x をとろう．コンパクト集合 $\bar{U}_x$ は十分大きい自然数 n をとると C_n の部分集合になるから $k>k_n$ のとき $U_n \cap V_k=\phi$．これから明らかに $U_n \cap V_i \neq \phi$ となる V_i は有限個である！ ▌

上の定理においてもしも $\mathscr{U}$ として可算個の局所有限な開集合から成るものをとれば $\mathscr{U}$ の細分 $\mathscr{V}$ で定理の条件を満たすものがとれるが，$\mathscr{U}$ の任意の元 U に対して，$\mathscr{V}$ の元 V で $\bar{V} \subset U$ を満たすものがあるとは限らない．しかしここで $\mathscr{U}$ の各元 U に対して $U \neq \phi$ のとき U に含まれる相対コンパクトな開集合 W で $W \neq \phi$，$\overline{W} \subset U$ となるものを一つずつ選んでおきそれら W の全体から成る集合 $\mathscr{W}$ をとると $\mathscr{W}$ は可算集合で X の各元 x に対して x の十分小さな近傍 U_x をとると $U_x \cap W \neq \phi$ を満たす $\mathscr{W}$ の元 W は有限個である ($\mathscr{U}$ が局所有限だから!).

ここで $\tilde{\mathcal{V}}=\mathcal{V}\cup\mathcal{W}$ とおけば $\tilde{\mathcal{V}}$ は X の可算開被覆であり，局所有限，しかもその各元は相対コンパクト，また $\mathcal{U}$ の各元 U に対して $\tilde{\mathcal{V}}$ の元 V で $\bar{V}\subset U$ となるものが存在する．したがって定理 3.13 の系としてつぎの命題が得られる．

系 1　X を第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間，$\mathcal{U}$ を X の可算局所有限開被覆とすると $\mathcal{U}$ の局所有限な細分 $\mathcal{V}$ で X の可算開被覆となりその各元は相対コンパクト，しかも

$$\forall U[U\in\mathcal{U}\Longrightarrow\exists V(V\in\mathcal{V}\wedge\bar{V}\subset U)]$$

を満たすようなものがある．

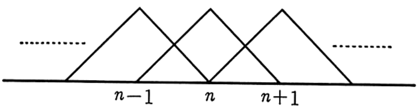
系 2　第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間は計量化可能であり，しかも可分である．

証明　定理 3.13 により第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトである．パラコンパクト Hausdorff 空間は T_4 空間であり，第2可算公理を満たす T_4 空間は計量化可能で可分である．▌

第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間としては $\boldsymbol{R}^n, S^n, \boldsymbol{T}^n$ など多くのものがある．実は距離空間はパラコンパクトであることも知られている (A. H. Stone, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977-982).

$\boldsymbol{R}$ の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ として $U_n=(n-1, n+1)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ 全体から成るものをとろう．いま $\boldsymbol{R}$ から $I=[0, 1]$ への連続写像 f_n $(n\in\boldsymbol{Z})$ として

$$f_n(x) = \max\{0, 1-|x-n|\} \qquad (x\in\boldsymbol{R})$$



によって定められるものをとれば，$f_n^{-1}((0, 1])=(n-1, n+1)=U_n$ となり，$m<n-1$，または $n+1<m$ $(m\in\boldsymbol{Z})$ のとき $f_n(U_m)=\{0\}$ となる．こうして，$f_n(x)\neq 0$ となるのは $x\in U_{n-1}\cup U_n\cup U_{n+1}$ のとき以外にはない．さらに，$\boldsymbol{R}$ の任意の元 x に対して

$$\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}f_n(x)=1$$

が成り立つ．

より一般に，X を位相空間，$\mathcal{U}$ を X の開被覆とし，可算集合 $\Lambda\ (\neq\phi)$ を添数集合とする X から I への連続写像の集合 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられていて，つぎの条件が満たされているとしよう．

(i) 各 $\lambda\in\Lambda$ について，$S_\lambda=f_\lambda^{-1}((0,1])$ とすると S_λ は相対コンパクト，さらに $\mathcal{U}$ の元 U があって $S_\lambda\subset U$ となる

(ii) X の各元 x に対して適当な x の近傍 U_x をとれば，$U_x\cap\bar{S}_\lambda\neq\phi$ となる $\lambda\in\Lambda$ は有限個に限る

(iii) X の各元 x に対して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda(x)=1 \qquad \text{((ii) によってこの和は意味を持つ)}$$

が成り立つ．

このとき $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆 $\mathcal{U}$ に従属する**1の分解** (decomposition of unity) と呼ぶ．上の例で $\{f_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ は $\boldsymbol{R}$ の $\mathcal{U}$ に従属する1の分解となっている．

定理 3.14 X を第2可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間，$\mathcal{U}$ を X の開被覆とすれば $\mathcal{U}$ に従属する1の分解が存在する．

証明 X はパラコンパクトだから $\mathcal{U}$ の局所有限な細分 $\mathcal{U}_1$ で X の開被覆となるものがある．X はさらに Lindelöf 空間だから $\mathcal{U}_1$ の可算部分被覆 $\mathcal{U}_2$ がある．定理 3.13 系1を用いてまず $\mathcal{U}_2$ の可算な局所有限細分 $\mathcal{V}$ で $X=\bigcup\mathcal{V}$，さらに $\mathcal{V}$ の各元 V は相対コンパクト開集合となるようなものをとろう．この $\mathcal{V}$ に再び系1を適用して $\mathcal{V}$ の可算な局所有限細分 $\mathcal{W}$ で $X=\bigcup\mathcal{W}$，$\mathcal{W}$ の各元は相対コンパクト開集合となるものをとっておく．ここで $\mathcal{V}$ の各元 $V\ (V\neq\phi)$ に対して $\mathcal{W}$ の元 $W\ (W\neq\phi)$ で $\overline{W}\subset V$ を満たすものがとれる．このような V, W に対して Uryson の補題を用いると連続写像 $\tilde{f}_V: X\to I$ を適当に選んで $\tilde{f}_V{}^{-1}(1)\supset\overline{W}$，$\hat{f}_V{}^{-1}(0)\supset X-V$ を満たすようにできることがわかる．このとき $S_{f_V}=\tilde{f}_V{}^{-1}((0,1])\subset V$ だから $\bar{S}_{f_V}$ はコンパクトになり，$\mathcal{V}$ が局所有限であることから $\{\tilde{f}_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ は上の条件 (i), (ii) を満たすことがわかる．さて $X=\bigcup\mathcal{W}$ および条件 (ii) より $\tilde{f}=\sum_{V\in\mathcal{V}}\tilde{f}_V$ は X から $(0,\infty)=\{\alpha\in\boldsymbol{R}\mid 0<\alpha\}$ への連続写像となることがわかる．ここで写像 $f_V: X\to I$ を $f_V(x)=\tilde{f}_V(x)/\tilde{f}(x)\ (x\in X)$ とおいて定めれば $\{f_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ は $\mathcal{U}$ に従属する1の分解となる．▮

§3.5　コンパクト Hausdorff 空間，コンパクト距離空間

§3.2の定理3.4系1からもわかるように Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト Hausdorff 空間である．特に $n-1$ 次元球面 S^{n-1} はコンパクト Hausdorff 空間，また n 次元トーラス $\boldsymbol{T}^n$, $n-1$ 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^{n-1}$ もコンパクト Hausdorff 空間である．さらに，Λ を任意の集合とするとき I^Λ はコンパクト Hausdorff 空間となる ($I=[0,1]$)．(問題2.32，定理3.3を参照.)　また p 進整数環 $\boldsymbol{Z}_p$ もコンパクト Hausdorff 空間となる (例3.2)．このように多種の位相空間がコンパクト Hausdorff 空間となり，それらの中には重要なものが多い．また定理3.9系1によりコンパクト Hausdorff 空間は T_4 空間であり，さらに同じ定理の系2により，コンパクト Hausdorff 空間 X が計量化可能であるための必要十分条件は X が第2可算公理を満たすことである．こうして，たとえば I^I は可分なコンパクト Hausdorff 空間だが，計量化不可能であることがわかる．

X をコンパクト Hausdorff 空間としよう．X の閉集合はコンパクトであり，逆に X のコンパクト部分集合は X の閉集合である．いま f を X から Hausdorff 空間 Y への連続写像とすれば，X の任意の閉集合 C の f による像 $f(C)$ は Y のコンパクトな部分集合であるから Y の閉集合である．したがってつぎの定理が成り立つ．

定理 3.15　コンパクト Hausdorff 空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である．——

一般に位相空間 X から位相空間 Y への連続な全単射は X から Y への位相写像となるとは限らないことは§2.1でも述べた通りだが，上の定理から直ちにつぎの系が得られる．

系　コンパクト Hausdorff 空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続な全単射は X から Y の上への位相写像となる．——

定理3.2により，位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 f は X のコンパクト部分集合を Y のコンパクト部分集合へ写すが，C を Y のコンパクト部分集合とするとき $f^{-1}(C)$ はコンパクトになるとは限らない．たとえば f を $\boldsymbol{R}^2$ の各元 (x_1, x_2) をその第1成分 x_1 に対応させる $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}$ への標準的射影とすれば，$\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合 $\{0\}$ の逆像 $f^{-1}(0)$ は $\boldsymbol{R}$ と同位相でありコンパクトではない．

位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 f は，Y の任意のコンパクト部分集合 C に対して $f^{-1}(C)$ がコンパクトになるとき X から Y への**固有写像** (proper mapping) と呼ばれる．この定義から直ちにつぎの命題が導かれる．

定理 3.16　コンパクト Hausdorff 空間から Hausdorff 空間への連続写像は固有写像である．——

一般に X をコンパクト位相空間，$C(X)$ を X から $\boldsymbol{R}$ への連続写像全体から成る集合とする．$f, g \in C(X)$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(fg)(x)=f(x)g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha(f(x))$ $(x \in X)$ とおけば $f+g$, fg, αf はみな $C(X)$ の元となり，こうして定められた和，積，スカラー積に関して $C(X)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環となる．$C(X)$ は X の**実連続関数多元環** (algebra of real continuous functions) と呼ばれる．

定理 3.17　X, Y をコンパクト位相空間, $F: X \to Y$ を連続写像とし，写像 $F^*: C(Y) \to C(X)$ を $F^*(g)(x)=(g\circ F)(x)$ $(x \in X,\ g \in C(Y))$ とおいて定めると F^* は $C(Y)$ から $C(X)$ への多元環の準同型写像である．また，Z をコンパクト位相空間，$G: Y \to Z$ を連続写像とすれば，

$$(G\circ F)^* = F^*\circ G^*.$$

さらに X, Y がともにコンパクト Hausdorff 空間ならばつぎの (i)-(iv) が成り立つ．

(i)　F が全射ならば F^* は単射．またこの逆も成り立つ

(ii)　F が単射ならば F^* は全射．この逆も成り立つ

(iii)　F が X から Y の上への位相写像ならば $(F^{-1})^*=(F^*)^{-1}$

(iv)　F が X から Y の上への位相写像となるための必要十分条件は F^* が $C(Y)$ から $C(X)$ の上への同型写像となることである．

問題 3.4　上の定理を証明せよ．——

上で，$f \in C(X)$ とすると $f(X)$ は有界である．$\|f\|=\sup\{\alpha \in \boldsymbol{R} \mid \exists x(x \in X \wedge \alpha=|f(x)|)\}$ とおいて $\|f\|$ を f の**ノルム** (norm) と呼ぶ．$f, g \in C(X)$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$ とするとき，明らかに

(i)　$\|f+g\| \leqq \|f\|+\|g\|$

(ii)　$\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$

が成り立つ．また，ここで

$$d(f,g)=\|f-g\|$$

とおけば，容易にわかるように d は $C(X)$ の計量となる．

さて，話を進めてコンパクト距離空間について考えることにしよう．まず距離空間がコンパクトになるための条件について調べよう．有界で閉じた距離空間は必ずしもコンパクトではないことは，$\boldsymbol{Q}\cap[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ がコンパクトではないことからわかる (例 3.4)．距離空間 (X,d) と X の部分集合 S が与えられたとき，S に関して有界性よりも強い，'全有界' という概念が定義される．すなわち，S が**全有界** (totally bounded) であるとは，任意の正の実数 ε に対して S を覆う有限個の ε 球がとれることを意味する．S が全有界ならば S は有界であるが，有界な距離空間が全有界であるとは限らない．たとえば $\boldsymbol{Q}\cap[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ は有界かつ全有界だが，離散距離空間 X は必ず有界，しかし X が全有界となるためには X が有限集合となることが必要十分である (読者自ら確かめられたい)．つぎの定理の証明は Y. Sagher による．

定理 3.18 (X,d) を距離空間とするとつぎの (i)-(iii) は互いに同値である．

(i) X はコンパクト

(ii) X の任意の点列 $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は集積点を持つ

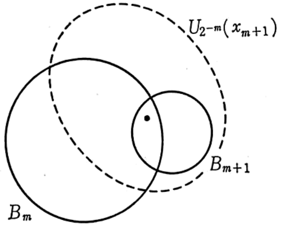
(iii) X は完備かつ全有界である．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つことは定理 3.8 系 1 によって示されている．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : (ii) が成り立てば X が完備となることは明らかだから，X が全有界となることを示そう．ε を正の実数とし X が有限個の ε 球では覆われないと仮定して矛盾を導こう．明らかに $X\neq\phi$ と仮定してよいから $x_1\in X$ とすると仮定により $X-U_\varepsilon(x_1)\neq\phi$，ゆえに $x_2\in X-U_\varepsilon(x_1)$ がある．同様に $X-(U_\varepsilon(x_1)\cup U_\varepsilon(x_2))$ の元 x_3 をとり，以下次々に $x_4, x_5, \cdots$ をとる．($x_1,\cdots,x_n\in X$ のとき $X-\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)\neq\phi$ だから $X-\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ の元 x_{n+1} がとれる——厳密には選出公理および帰納定理を用いる.) こうして X の点列 $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ が得られるが $n<m$ のとき $d(x_n,x_m)>\varepsilon$ だから明らかに $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は集積点を持たない．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : X を覆う有限個の 1/2 球の集合 $\mathcal{B}_1$ をとり，$\mathcal{U}$ を X の任意の開被覆としよう．$\mathcal{B}_1$ の各元が $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合で覆われれば $\mathcal{U}$ は有限部分被覆を持つ．いま $\mathcal{B}_1$ の元 B_1 が $\mathcal{U}$ の有限個の開集合では覆われないものとしよう．このとき B_1 は有限個の 1/4 球の集合 $\mathcal{B}_2$ で覆われる．上と同様に，$\mathcal{B}_2$

の元 B_2 を適当にとれば $B_1 \cap B_2 \neq \phi$, さらに B_2 は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合では覆われないはずである．以下同様に，2^{-n} 球 B_n があって B_n が $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合では覆われないとき B_n を覆う有限個の $2^{-(n+1)}$ 球の中の一つ B_{n+1} をとり $B_n \cap B_{n+1} \neq \phi$, しかも B_{n+1} も $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合では覆われないようにすることができる．各 $n \in N$ について $B_n \cap B_{n+1}$ の元 x_n を一つ選ぼう．こうして X の点列 $(x_n)_{n \in N}$ が得られ $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ となるから $(x_n)_{n \in N}$ は X の Cauchy 列となり，X の完備性により $(x_n)_{n \in N}$ は X の元 x_0 に収束する．x_0 を含む $\mathcal{U}$ の元を U_0 としよう．すると十分大きな自然数 N をとれば $U_{2^{-N}}(x_0) \subset U_0$. また M を十分大きい自然数とすれば $m \geqq M$ となる任意の自然数 m について $x_m \in U_{2^{-(N+1)}}(x_0)$. いま $m \geqq \max\{M, N+1\}$ とすれば B_{m+1}



$\subset U_{2^{-m}}(x_{m+1})$, $x_{m+1} \in U_{2^{-(N+1)}}(x_0)$. ここで $U_{2^{-m}}(x_{m+1}) \subset U_{2^{-N}}(x_0)$ が成り立つ．実際 $y \in U_{2^{-m}}(x_{m+1})$ とすると，

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leqq d(x_0, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, y) < 2^{-(N+1)} + 2^{-m} \leqq 2^{-(N+1)} \times 2 \\ &= 2^{-N}. \end{aligned}$$

ゆえに $B_{m+1} \subset U_0$ となり，これは B_{m+1} の選び方と矛盾する！ ▌

定理 3.19　全有界な距離空間は可分である．

証明　任意の自然数 n に対して全有界な距離空間 X を覆う有限個の n^{-1} 球 $U_{n^{-1}}(x_{n,i})$ $(i=1, \cdots, r_n)$ がある．$S_n = \{x_{n,1}, \cdots, x_{n,r_n}\}$, $S = \bigcup_{n \in N} S_n$ とおけば S は可算集合である．$\bar{S} = X$ となることを示そう．そのために $x \in X$, $\varepsilon > 0$ とし，自然数 n を $n^{-1} < \varepsilon$ となるように選べば $x \in U_{n^{-1}}(x_{n,i})$ を満たす i $(1 \leqq i \leqq r_n)$ があり，$d(x, x_{n,i}) < n^{-1} < \varepsilon$ (d は X の計量)，ゆえに $x_{n,i} \in U_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon(x) \cap S \ni x_{n,i}$ となる！ ▌

系 コンパクト距離空間は第2可算公理を満たす．

定理 3.20 コンパクト距離空間 X から距離空間 Y への連続写像は一様連続である．

証明 f を X から Y への連続写像，ε を任意の正の実数とし Y の元 y の ε 近傍を $V_\varepsilon(y)$ と書こう．f は連続だから X の各元 x に対して適当な正の実数 δ を選べば，x の δ 近傍 $U_\delta(x)$ の f による像 $f(U_\delta(x))$ が $V_{\varepsilon/2}(f(x))$ の部分集合となるようにできる．各 $x \in X$ に対してこのような $\delta>0$ を選び，$U_{\delta/2}(x)$ 全体から成る集合 $\mathcal{U}$ を作れば，$\mathcal{U}$ は X の開被覆だから X のコンパクト性により $\mathcal{U}$ は有限部分被覆 $\{U_{\delta_1/2}(x_1), \cdots, U_{\delta_n/2}(x_n)\}$ を持つ．$\delta_0=\min\{\delta_1/2, \cdots, \delta_n/2\}$ としよう．すると d, d' を X, Y の計量としたとき $x, x' \in X$, $d(x, x')<\delta_0$ ならば $d'(f(x), f(x'))<\varepsilon$ となる．実際このとき $x \in U_{\delta_i/2}(x_i)$ となる i $(1 \leqq i \leqq n)$ を選べば

$$d'(f(x), f(x')) \leqq d'(f(x), f(x_i))+d'(f(x_i), f(x'))$$

となるが，

$$d(x_i, x') \leqq d(x_i, x)+d(x, x') < \delta_i/2+\delta_0 \leqq \delta_i,$$

ゆえに $d'(f(x_i), f(x'))<\varepsilon/2$, また $d'(f(x), f(x_i))<\varepsilon/2$ も成り立つから $d'(f(x), f(x'))<\varepsilon$. ∎

第4章　写像空間, 位相群, 一様空間

§4.1　写像空間 I

§3.5で見たようにコンパクト位相空間 X の実連続関数多元環 $C(X)$ は X の性質を反映し，またそれ自体がさまざまの重要な性質を持つ.

一般に位相空間 X, Y が与えられたとき，X から Y への写像全体の集合 Y^X を考え，Y^X に位相を与えよう．Y^X の元 f, g が‘近い’ということを表わす一つの方法として，X の任意の有限個の点 $x_1, \cdots, x_n$ をとったとき，$f(x_i)$ と $g(x_i)$ $(i=1, \cdots, n)$ が Y の中で‘近い’というものがある．より正確な定義を与えるために，$A\subset X$, $B\subset Y$ とするとき

$$W(A, B) = \{f\in Y^X \mid f(A)\subset B\}$$

とおこう．たとえば $f\in Y^X$ ならば X の任意の元 x に対して $f\in W(\{x\}, Y)$ となる．ここで Y^X の位相 $\mathcal{O}$ として，$W(\{x\}, U)$ ($x\in X$, U は Y の開集合) と表わされる Y^X の部分集合全体から成る集合を部分基とするものをとり，$\mathcal{O}$ を Y^X の**有限開位相** (finite-open topology) または**点収束位相** (topology of pointwise convergence) と呼ぶ．$\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}_{\mathrm{f.op.}}$ と書こう．$\mathcal{O}_{\mathrm{f.op.}}$ は実は Y^X の直積位相に他ならない (読者自ら確かめられたい).

定理 4.1　X, Y を位相空間とし，$(\Lambda, \prec)$ を有向集合，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を Y^X の有向点列とする．ここで Y^X の元 f があり Y^X の有限開位相に関して $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda=f$ となるための必要十分条件は，X の任意の元 x に対して $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)=f(x)$ が成り立つことである.

問題 4.1　上の定理を証明せよ．——

Y^X の位相として有限開位相以外によく用いられるものに**コンパクト開位相** (compact-open topology) と呼ばれるものがある．コンパクト開位相 $\mathcal{O}_{\mathrm{co.op.}}$ は

$$\mathscr{W} = \{S\in Y^X \mid \exists C\exists U(C \text{ は } X \text{ のコンパクト集合} \wedge U \text{ は } Y \text{ の開集合} \wedge S=W(C, U))\}$$

という集合を部分基とする位相である．($x\in X$ のとき $\{x\}$ はコンパクトだから,

Y^X の任意の元 f は $W(\{x\}, Y)$ に含まれる. このことから $\mathscr{W}$ が位相の部分基の公理を満たすことがわかる.) 明らかに $\mathcal{O}_{\text{f.op.}} \subset \mathcal{O}_{\text{co.op.}}$ となる.

位相空間 X, Y が与えられたとき Y^X の部分集合で X から Y への連続写像全体から成るものを $C(X, Y)$ と書こう. Y^X の有限開位相によって定まる $C(X, Y)$ の位相 (Y^X の部分空間としての位相) を $C(X, Y)$ の有限開位相と呼び, 同様に Y^X のコンパクト開位相によって誘導される $C(X, Y)$ の位相を $C(X, Y)$ のコンパクト開位相と呼ぶ. いま直積集合 $C(X, Y)\times X$ から Y への写像 φ を, $\varphi(f, x)=f(x)$ ($(f, x)\in C(X, Y)\times X$) によって定め, φ を ($C(X, Y)\times X$ から Y への) '自然写像' と呼ぼう. $C(X, Y)$ の位相 $\mathcal{O}$ は, φ が直積空間 $C(X, Y)\times X$ から Y への連続写像となるとき **admissible** であるといわれる. またこのとき 'φ は $\mathcal{O}$ に関して連続' であるということにする.

定理 4.2 X, Y を位相空間, $\mathcal{O}$ を $C(X, Y)$ のコンパクト開位相とする.

(i) $\mathcal{O}'$ を $C(X, Y)$ の admissible な位相とすれば $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}'$

(ii) X が局所コンパクト Hausdorff 空間ならば $\mathcal{O}$ は admissible である.

証明 (i) C を X のコンパクト集合, U を Y の開集合とするとき $W(C, U)\cap C(X, Y)$ を $\widetilde{W}(C, U)$ と書こう. $f\in \widetilde{W}(C, U)$ に対して $\mathcal{O}'$ の元 V があり $f\in V\subset \widetilde{W}(C, U)$ が成り立つことを示せばよい. いま自然写像 $\varphi: C(X, Y)\times X \to Y$ が $\mathcal{O}'$ に関して連続であると仮定している. ここで, C の各元 x に対して $\varphi(f, x)=f(x)\in U$ となることに注意しよう. U と $x\in C$ に対して $\mathcal{O}'$ の元 V_x, X の開集合 W_x を適当にとれば, $(f, x)\in V_x\times W_x$ かつ $\varphi(V_x\times W_x)\subset U$ が成り立つ (W_x は, C の元 x の開近傍である). このような W_x の全体はコンパクト集合 C の開被覆を成すから有限個の C の元 $x_1, \cdots, x_n$ をとれば $C\subset\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ となる. ここで $V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ とおけば $f\in V$, $V\in\mathcal{O}'$, かつ $\varphi(V\times W_{x_i})\subset U$ ($i=1, \cdots, n$), したがって $\varphi(V\times C)\subset U$, ゆえに $V\subset \widetilde{W}(C, U)$ となって (i) が示された.

(ii) $f\in C(X, Y)$, $x\in X$, $\varphi(f, x)=f(x)=y\in U$, ただし U は Y の開集合としよう. $f^{-1}(U)$ は x の開近傍だから, x のコンパクトな近傍 C を部分集合として含む (定理 3.10). ゆえに $f(C)\subset U$, $(f, x)\in \widetilde{W}(C, U)\times C^i\subset\varphi^{-1}(U)$, すなわち φ は $\mathcal{O}$ に関して連続である. ▌

問題 4.2 Y が T_1 (または T_2) 空間ならば $C(X, Y)$ はコンパクト開位相に関して T_1 (または T_2) 空間となることを示せ. [ヒント] まず Y^X が有限開位相

(すなわち直積位相)に関して T_1 (または T_2)空間になることを確かめ，コンパクト開位相が有限開位相よりも強いことを用いるとよい．

定理 4.3 X を位相空間，Y を T_3 空間とすると $C(X, Y)$ はコンパクト開位相に関して T_3 空間となる．

証明 $f\in C(X, Y)$，$\tilde{U}$ を $C(X, Y)$ の開集合で f を含むものとするとき，$C(X, Y)$ の開集合 V があり $f\in V\subset\bar{V}\subset\tilde{U}$ が成り立つことを示せばよい．ここで $\tilde{U}$ として $\tilde{W}(C, U)$ と表わされるもの (ただし C は X のコンパクト集合，U は Y の開集合，$\tilde{W}(C, U)=W(C, U)\cap C(X, Y)$) をとり，その場合に上のことを示せば十分である．$f\in\tilde{W}(C, U)$ とすると $f(C)$ は Y のコンパクト集合で $f(C)\subset U$. したがって $f(C)$ は T_3 空間 Y の閉集合であることに注意すれば Y の開集合 W があって $f(C)\subset W\subset\overline{W}\subset U$ が成り立つことがわかる．ゆえに $f\in\tilde{W}(C, W)\subset\tilde{W}(C, U)$ となる．$\tilde{W}(C, W)$ の閉包が $\tilde{W}(C, U)$ の部分集合となることを示せば証明が完了する．ところが $\tilde{W}(C, W)\subset\tilde{W}(C, \overline{W})\subset\tilde{W}(C, U)$ だから $\tilde{W}(C, \overline{W})$ が $C(X, Y)$ のコンパクト開位相に関して閉じていることがわかれば十分である．さて，$\tilde{W}(C, \overline{W})=W(C, \overline{W})\cap C(X, Y)$，$W(C, \overline{W})\subset Y^X$ である．いま直積集合 Y^X から Y への写像 π_x $(x\in X)$ を $\pi_x(g)=g(x)$ $(g\in Y^X)$ によって定めれば，π_x は標準的射影となり，$W(C, \overline{W})=\bigcap_{c\in C}\pi_c{}^{-1}(\overline{W})$. したがって $W(C, \overline{W})$ は直積空間 Y^X の閉集合である．ところが Y^X のコンパクト開位相は Y^X の有限開位相(すなわち直積位相)よりも強いので $W(C, \overline{W})$ はコンパクト開位相に関しても閉集合，ゆえに $\tilde{W}(C, \overline{W})$ は $C(X, Y)$ のコンパクト開位相に関する閉集合となり定理が証明された．▌

X, Y, Z を位相空間とするとき写像

$$\mu\colon C(X, Y)\times C(Y, Z)\longrightarrow C(X, Z)$$

を $\mu(f, g)=g\circ f$ $(f\in C(X, Y),\ g\in C(Y, Z))$ とおいて定義し μ を‘結合写像’と呼ぼう．$C(X, Y), C(Y, Z), C(X, Z)$ をそれぞれコンパクト開位相に関して位相空間と考えたとき，上の μ は連続になるだろうか．f, g は上の通りとし $\mu(f, g)\in W(C, V)$ (ただし C は X のコンパクト集合，V は Z の開集合)としよう．$g^{-1}(V)$ は Y の開集合で $f(C)\subset g^{-1}(V)$. いま Y を局所コンパクト Hausdorff 空間と仮定すると，$f(C)$ は Y のコンパクト集合だから Y の相対コンパクト開集合 U があり $f(C)\subset U\subset\bar{U}\subset g^{-1}(V)$ となる(定理 3.11)．$f\in W(C, U)$，$g\in$

$W(\bar{U}, V)$ が成り立ち，$\widetilde{W}(C, U)=W(C, U)\cap C(X, Y)$，$\widetilde{W}(\bar{U}, V)=W(\bar{U}, V)\cap C(Y, Z)$ とおけば，$\mu(\widetilde{W}(C, U)\times\widetilde{W}(\bar{U}, V))\subset\widetilde{W}(C, V)$ $(=W(C, V)\cap C(X, Z))$．ゆえにつぎの定理が成り立つ．

定理 4.4 X, Z を位相空間，Y を局所コンパクト Hausdorff 空間とすると，結合写像

$$\mu\colon C(X, Y)\times C(Y, Z)\longrightarrow C(X, Z)$$

は $C(X, Y), C(Y, Z), C(X, Z)$ にコンパクト開位相を与えて位相空間とみなしたとき連続になる．——

X を局所コンパクト Hausdorff 空間としよう．$C(X, X)$ は写像の結合を演算とする半群を成し単位元 1_X を持つ．上の定理により $C(X, X)$ にコンパクト開位相を与えたとき半群の演算は連続になる．

§4.2 位 相 群

位相空間 G が群の構造を持ち，写像 $\mu: G\times G\to G$（ただし $\mu(g, h)=gh$）および写像 $\nu: G\to G$（ただし $\nu(g)=g^{-1}$）が連続ならば，G は**位相群** (topological group) と呼ばれる．特に G が可換群でその演算が加法の形で表わされるとき，G は**位相加群** (topological additive group) と呼ばれる．$\boldsymbol{R}$ は位相加群であり $\boldsymbol{Z}$ はその離散的部分加群である．また §1.5 で述べたように $GL_n(\boldsymbol{R})$ は Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の部分距離空間であり群の演算は連続になるので位相群となる．$SL_n(\boldsymbol{R})$, $O(n), SO(n)$ などは $GL_n(\boldsymbol{R})$ の閉部分群でそれぞれ位相群となる（読者自ら確かめられたい）．

問題 4.3 群 G の Krull 空間は位相群となることを確かめよ．——

G を位相群，$g\in G$ とし写像 $L_g: G\to G$ を $L_g(h)=gh$ $(h\in G)$ とおいて定義すれば $L_g\circ L_h=L_{gh}$，$L_e=1_G$（e は G の単位元），ゆえに $L_g{}^{-1}=L_{g^{-1}}$，したがって L_g は G から G の上への位相写像となる．こうして G の単位元 e の任意の近傍 U_e は L_g によって g の近傍 gU_e に写され，逆に g の任意の近傍 V_g をとると，e の近傍 W_e があって $V_g=gW_e$（すなわち $W_e=g^{-1}V_g$）となる．

G を位相群，$\mathfrak{N}_0$ を G の単位元 e の基本近傍系としよう．すると

(TG 1) $\mathfrak{N}_0\neq\phi$

(TG 2) $U\in\mathfrak{N}_0\Longrightarrow e\in U$

(TG 3) $U, V \in \mathfrak{N}_0 \Longrightarrow \exists W(W \in \mathfrak{N}_0 \wedge W \subset U \cap V)$

(TG 4) $U \in \mathfrak{N}_0 \Longrightarrow \exists V(V \in \mathfrak{N}_0 \wedge V^{-1}V \subset U)$

(TG 5) $x \in G \wedge U \in \mathfrak{N}_0 \Longrightarrow \exists V(V \in \mathfrak{N}_0 \wedge V \subset xUx^{-1})$

が成り立つ(ただし $V^{-1}=\{x \in G \mid \exists y(y \in V \wedge x=y^{-1})\}$, $V^{-1}V=\{x \in G \mid \exists y \exists z(y \in V^{-1} \wedge z \in V \wedge x=yz)\}$, $xUx^{-1}=\{y \in G \mid \exists u(u \in U \wedge y=xux^{-1})\}$). また G が T_1 空間ならばさらに

(TG 6) $\bigcap \mathfrak{N}_0=\{e\}$

が成り立つ.

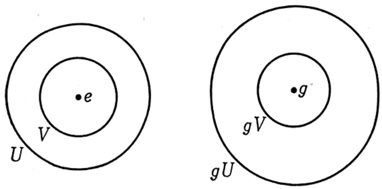
問題 4.4 上の命題(TG 1)-(TG 5)および G が T_1 空間ならばさらに(TG 6)が成り立つことを示せ.

問題 4.5 位相群 G が T_1 空間ならば G は Hausdorff 空間となることを示せ. ——

逆に群 G と $\mathcal{P}(G)$ の空ではない部分集合 $\mathfrak{N}_0$ が与えられ, 上の(TG 1)-(TG 5)が満たされているとき, $g \in G$ に対して $\mathfrak{N}_0(g)=\{U \in \mathcal{P}(G) \mid \exists V(V \in \mathfrak{N}_0 \wedge U=gV)\}$ とおけば, G は $\mathfrak{N}_0(g)$ を g の基本近傍系として持つ位相群となり, さらに(TG 6)が満たされれば G は T_1 空間となることがわかる. 実際(TG 1)-(TG 5)が満たされていれば $\mathfrak{N}_0(g)$ が g の基本近傍系の公理(FN 1)-(FN 4)を満たすことを確かめてみよう(§2.3参照). (FN 1)すなわち“$\forall g(g \in G \Longrightarrow \mathfrak{N}_0(g) \neq \phi)$”が成り立つことは $\mathfrak{N}_0 \neq \phi$ より明らかである. また(FN 2), すなわち“$U \in \mathfrak{N}_0(g) \Longrightarrow g \in U$”および(FN 3)“$U, V \in \mathfrak{N}_0(g) \Longrightarrow \exists W(W \in \mathfrak{N}_0(g) \wedge W \subset U \cap V)$”が成り立つことは(TG 2), (TG 3)から直ちに導かれる. (FN 4)“$\forall U[U \in \mathfrak{N}_0(g) \Longrightarrow \exists V[V \in \mathfrak{N}_0(g) \wedge V \subset U \wedge \forall h[h \in V \Longrightarrow \exists W_h(W_h \in \mathfrak{N}_0(h) \wedge W_h \subset U)]]]$”が成り立つことを示そう. まず $g=e$ の場合を考える. ここで“$\forall U(U \in \mathfrak{N}_0 \Longrightarrow \exists V(V \in \mathfrak{N}_0 \wedge VV \subset U))$”という命題——これを命題(P)と記そう——が成り立てば(FN 4)を $g=e$ の場合に限った命題が成り立つことがわかる. (実際このとき上のような W_h $(h \in V)$ として hV をとればよい!) 命題(P)を示そう. まず(TG 4)より $\mathfrak{N}_0$ の任意の元 W をとると, $W'^{-1}W' \subset W$ となる $\mathfrak{N}_0$ の元 W' があるが, $W'^{-1} \subset W'^{-1}W'$, ゆえに $W'^{-1} \subset W$. ところが $W'^{-1} \subset W \Leftrightarrow W' \subset W^{-1}$ が成り立つから

(Q) $$\forall W[W \in \mathfrak{N}_0 \Longrightarrow \exists W'(W' \in \mathfrak{N}_0 \wedge W' \subset W^{-1})]$$

という命題が成り立つ．さて $\mathfrak{N}_0$ の元 U に対して $\mathfrak{N}_0$ の元 W を選んで $W^{-1}W\subset U$ が成り立つようにし，つぎに $\mathfrak{N}_0$ の元 W' を $W'\subset W^{-1}$ を満たすようにとろう．すると $W^{-1}\cap W\supset W'\cap W$，ゆえに(TG 3)より $\mathfrak{N}_0$ の元 V をとって $V\subset W'\cap W$ を成り立たせることができる．このとき $V\subset W^{-1}\cap W$，ゆえに $VV\subset W^{-1}W\subset U$，こうして命題(P)が導かれた！ (FN 4)が成り立つことはいまや容易にわかる．実際 $U'\in\mathfrak{N}_0(g)$ のとき $U'=gU$ $(U\in\mathfrak{N}_0)$ と書けるから $\mathfrak{N}_0$ の元 V を $VV\subset U$ となるようにとり $V'=gV$ とおけば $h'=gh$ $(h\in V)$ のとき $ghV\in\mathfrak{N}_0(h')$，



$ghV\subset gVV\subset gU=U'$ となる！ こうして $\mathfrak{N}_0(g)$ が基本近傍系の公理を満たすことが示された．さらに(TG 6)が満たされれば G が T_1 空間となることも明らかである．さて，G の演算 μ,ν が連続になることを示そう．上に述べたように，写像 $\mu:G\times G\to G$ を $\mu(g,h)=gh$ によって定め，gh の近傍 ghU $(U\in\mathfrak{N}_0)$ を任意にとろう．$V\in\mathfrak{N}_0$ とすると $(gV)(hV)=gh(h^{-1}Vh)V$．さて，命題(P)が成り立つことより，$V\in\mathfrak{N}_0$ を適当に選べば与えられた U に対して $VV\subset U$ となる．さらに(TG 5)より $\mathfrak{N}_0$ の元 W で，上の V に対して $W\subset hVh^{-1}$ を成り立たせるものがとれる．ここで $(gW)(hV)=gh(h^{-1}Wh)V\subset(gh)VV\subset ghU$ となるから μ は連続である！ つぎに写像 $\nu:G\to G$ を $\nu(g)=g^{-1}$ とおいて定め，再び U を $\mathfrak{N}_0$ の任意の元としよう．また(TG 5)より $\mathfrak{N}_0$ の元 V を $gVg^{-1}\subset U$ を満たすようにとり，さらに(TG 4)より $\mathfrak{N}_0$ の元 W を $W^{-1}W\subset V$ を満たすようにとれば，$W^{-1}\subset W^{-1}W\subset V$ だから $W^{-1}\subset V$，ゆえに $\nu(gW)=W^{-1}g^{-1}=g^{-1}(gW^{-1}g^{-1})\subset g^{-1}(gVg^{-1})\subset g^{-1}U$ となって ν も連続となり，G は位相群となる．

一般に X を位相空間とするとき，X からそれ自身の上への位相写像全体の成す集合を Homeo(X) と書こう(§1.5参照)．Homeo(X) は $C(X,X)$ の部分空間となり，さらに $C(X,X)$ の部分群ともなる．

定理 4.5 G を位相群，$C(G,G)$ を G の位相変換半群 ($C(G,G)$ の位相はコンパクト開位相) とし，写像 $\lambda: G\to C(G,G)$ を $\lambda(g)=L_g$ によって定義する.

(i) λ は G から Homeo(G) の中への群としての同型写像である

(ii) G が局所コンパクト Hausdorff 空間ならば λ は G から $\lambda(G)$ の上への位相写像である.

証明 (i) が成り立つことは定義より明らかである. (ii) を示すために，まず C を G のコンパクト集合 ($C\neq\phi$)，U を G の開集合とし $L_g\in W(C,U)$ (すなわち $gC\subset U$) が成り立つような G の元 g をとろう. このときまず G の単位元 e の基本近傍系 $\mathfrak{N}_0$ の元 V を適当に選べば $\lambda(gV)\subset W(C,U)$ となることを示そう. $gC\subset U \Longrightarrow C\subset g^{-1}U$, $g^{-1}U$ は G の開集合だから C の任意の元 x が与えられたとき $\mathfrak{N}_0$ の元 W_x を適当にとり $W_x x\subset g^{-1}U$ を成り立たせることができる. いま $\mathfrak{N}_0$ の元 V_x を $V_xV_x\subset W_x$ となるように選ぼう ($x\in C$). ここで C はコンパクトだから C の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ があって $C\subset\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}x_i\subset g^{-1}U$ となる. $V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}\in\mathfrak{N}_0$ だが，C の任意の元 $x=v_ix_i$ ($v_i\in V_{x_i}$) をとると，$v\in V$ のとき $vx=(vv_i)x_i\in(V_{x_i}V_{x_i})x_i\subset W_{x_i}x_i\subset g^{-1}U$，ゆえに $VC\subset g^{-1}U$，したがって $(gV)C\subset U$，すなわち $\lambda(gV)\subset W(C,U)$ となる！ 逆に U を $\mathfrak{N}_0$ の任意の元，$g\in G$ とするとき，G のコンパクト集合 C，G の開集合 V を適当に選べば $W(C,V)\cap\lambda(G)\subset\lambda(gU)$ が成り立つことを示そう. 定理 3.10 により e のコンパクトな近傍 C で，$C\subset U$ となるものがある. V として gU をとろう. $h\in G$, $hC\subset gU$ ならば $h=he\in hC\subset gU$ となるから $W(C,gU)\cap\lambda(G)\subset\lambda(gU)$ が成り立つ. ▌

代数的な群演算と位相的構造を併せ持つ位相群はさまざまの興味深い性質を持ち，特に位相群の一種である Lie 群，代数群については多くの結果が得られているが，本講では位相群についてはこれ以上ふれずつぎに進もう.

§4.3 一 様 空 間

一般の位相空間 X においては X の元 x,y ($x\neq y$) をとると，x の基本近傍系と y の基本近傍系の間には‘直接的’な関係があるとは限らない. しかし X が距離空間である場合，または前節で見たように X が位相群となる場合には，X の 2 元 x,y の基本近傍系の間には‘直接的’な関係がある. 距離空間や位相群の持つこのような性質は A. Weil によってさらに一般化され，つぎのような‘一様空

間' の概念が得られた．

X, Λ を集合 ($\Lambda \neq \phi$) とし，$\Lambda \times X$ から $\mathcal{P}(X)$ への写像 φ が与えられているとする．$\varphi(\lambda, x)$ を $U_\lambda(x)$ と書き ($U_\lambda(x) \subset X$)，x を固定したとき $U_\lambda(x)$ ($\lambda \in \Lambda$) 全体から成る集合を $\mathcal{U}_x$ と書こう．記号的に，$\varphi(\Lambda, x) = \mathcal{U}_x = \{U_\lambda(x) \in \mathcal{P}(X) \mid \lambda \in \Lambda\}$．ここでつぎの条件を考える．

(U 1)　$x \in U_\lambda(x)$　($\lambda \in \Lambda$,　$x \in X$)

(U 2)　$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda(x) = \{x\}$

(U 3)　λ, μ を Λ の任意の元とするとき Λ の元 ν を適当に選べば

$$U_\nu(x) \subset U_\lambda(x) \cap U_\mu(x)$$

が X の任意の元 x について成り立つ

(U 4)　$\lambda \in \Lambda$ に対して $\mu \in \Lambda$ を適当に選べば

$$x \in U_\mu(y) \Longrightarrow y \in U_\lambda(x) \qquad (x, y \in X)$$

が成り立つ

(U 5)　$\lambda \in \Lambda$ に対して $\mu \in \Lambda$ を適当に選べば

$$x \in U_\mu(y) \wedge y \in U_\mu(z) \Longrightarrow x \in U_\lambda(z) \qquad (x, y, z \in X)$$

が成り立つ．

これらの (U 1)-(U 5) が成り立つとき (X, Λ, φ) または $(X, \mathcal{U}_x)$ または単に X を**一様空間** (uniform space) と呼び，φ または $\mathcal{U}_x$ ($x \in X$) は X の**一様性** (uniformity) を定めるという．

例 4.1　X を距離空間，d をその計量とし，$\Lambda = \{\varepsilon \in \boldsymbol{R} \mid 0 < \varepsilon\}$ とする．$(\varepsilon, x) \in \Lambda \times X$ に対して $\varphi(\varepsilon, x) = U_\varepsilon(x)$ (x の ε 近傍) とすると (X, Λ, φ) は一様空間となる（読者自ら確かめられたい）．

例 4.2　G を位相群で T_1 空間となるものとし，Λ として G の単位元 e の基本近傍系 $\mathfrak{N}_0$ をとり，$(U, g) \in \mathfrak{N}_0 \times G$ に対して $\varphi(U, g) = gU$ とすると $(G, \mathfrak{N}_0, \varphi)$ は一様空間となる．実際 (U 1), (U 2) が成り立つことは (TG 1), (TG 2), (TG 6) から直ちに導かれる．また (U 3) は (TG 3) から導かれる．(U 4) を導くために，$U \in \mathfrak{N}_0$ に対し $V \in \mathfrak{N}_0$ を $V^{-1}V \subset U$ を満たすように選び ((TG 4))，$g \in hV$ とすれば $g = hv$ ($v \in V$)，ゆえに $h = gv^{-1} \in gV^{-1} \subset gU$．すなわち (U 4) が成り立つ．(U 5) を示すために $U \in \mathfrak{N}_0$ に対して§4.2に述べた命題 (P) を用いて，$V \in \mathfrak{N}_0$ を $VV \subset U$ となるように選ぼう．すると $g_1 \in g_2 V \wedge g_2 \in g_3 V \Longrightarrow g_1 = g_2 v = g_3 (v'v)$

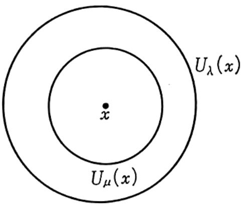
$(v, v' \in V)$，ゆえに $g_1 \in g_3 U$ となる！ ——

集合 X に対して $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda(x) \in \mathcal{P}(X) \mid \lambda \in \Lambda\}$，$\mathcal{V}_x = \{V_\mu(x) \in \mathcal{P}(X) \mid \mu \in M\}$ $(x \in X)$ がともに一様性を与えるとする．$\varphi(\lambda, x) = U_\lambda(x)$，$\psi(\mu, x) = V_\mu(x)$ としよう．ここで，Λ の任意の元 λ に対して M の元 μ を適当に選べば $V_\mu(x) \subset U_\lambda(x)$ $(x \in X)$ が成り立ち，さらに M の任意の元 μ に対して Λ の適当な元 λ を選び，$U_\lambda(x) \subset V_\mu(x)$ $(x \in X)$ が成り立つならば一様性 $\mathcal{U}_x, \mathcal{V}_x$ または φ, ψ は**同値** (equivalent) であるといい，$(X, \Lambda, \varphi) \approx (X, M, \psi)$ と書く．

(X, Λ, φ) を一様空間とすると X の一様性 $\mathcal{U}_x$ $(x \in X)$ は x の基本近傍系の公理を満たす．実際，(FN 1)“$\forall x(x \in X \Longrightarrow \mathcal{U}_x \neq \phi)$”，(FN 2)“$U_\lambda(x) \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow x \in U_\lambda(x)$”，(FN 3)“$U, V \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow \exists W(W \in \mathcal{U}_x \wedge W \subset U \cap V)$”がみな成り立つことは明らかである．また (FN 4)“$\forall U[U \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow \exists V[V \in \mathcal{U}_x \wedge V \subset U \wedge \forall y[y \in V \Longrightarrow \exists W_y(W_y \subset U \wedge W_y \in \mathcal{U}_y)]]]$”が成り立つことはつぎのように示される．$U = U_\lambda(x) \in \mathcal{U}_x$ に対し Λ の元 μ を適当に選んで

$$x_1 \in U_\mu(x_2) \wedge x_2 \in U_\mu(x_3) \Longrightarrow x_1 \in U_\lambda(x_3) \qquad (x_1, x_2, x_3 \in X)$$

が成り立つようにしよう．$V = U_\mu(x)$ とおけば $V \in \mathcal{U}_x$，また $y \in V$ のとき $z \in$



$U_\mu(y)$ とすれば $z \in U_\mu(y) \wedge y \in U_\mu(x)$ したがって $z \in U_\lambda(x) = U$ が成り立つ．ゆえに $W_y = U_\mu(y)$ とおけば $W_y \in \mathcal{U}_y \wedge W_y \subset U$．特に $y = x$ とすれば $W_x = U_\mu(x) = V \subset U$．こうして (FN 4) が成り立つことが示された．このように X の一様性 φ または $\mathcal{U}_x$ $(x \in X)$ から定められる X の位相 $\mathcal{O}$ を，(X, Λ, φ) または $(X, \mathcal{U}_x)$ の**一様位相** (uniform topology) といい，$\mathcal{U}_x$ を x の**一様近傍系** (uniform system of neighborhoods) という．またこのとき位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を $(X, \mathcal{U}_x)$ に付随する**一様位相空間**と呼ぼう．$\mathcal{U}_x$ $(x \in X)$, $\mathcal{V}_x$ $(x \in X)$ が X の同値な一様性ならばそれらによって定められる X の位相は相等しい．

一様空間に関してさまざまの重要な結果が得られている．たとえば一様空間 (X, Λ, φ) $(\mathcal{U}_x=\varphi(\Lambda, x))$ が与えられたとき，X が計量 d を持ち，一様性 $\mathcal{U}_x$ $(x\in X)$ が d によって定められる一様性 $\mathcal{V}_x$ $(=\{U_\varepsilon(x)\,|\,\varepsilon>0\})$ $(x\in X)$ と同値になるための必要十分条件は可算集合 M および X の一様性 $\psi: M\times X\to\mathcal{P}(X)$ が存在して $(X, \Lambda, \varphi)\approx(X, M, \psi)$ となることであることが証明される．このことから直ちに，第1可算公理を満たす Hausdorff 位相群は計量化可能であることが導かれる．これらのことについては，河田敬義-三村征雄“現代数学概説 II”，岩波書店，を参照されたい．

§4.4　写像空間 II

X を位相空間，(Y, Λ, φ) $(\varphi(\lambda, y)=U_\lambda(y)$ $(\lambda\in\Lambda,\ y\in Y))$ を一様空間とし (Y, Λ, φ) に付随する一様位相空間を単に Y と表わす．写像空間 $C(X, Y)$ はこのとき一様空間の構造を持つ．実際 $\mathcal{C}=\mathcal{C}(X)=\{C\in\mathcal{P}(X)\,|\,C$ はコンパクト$\}$，$M=\mathcal{C}\times\Lambda$ とし，写像 $\Phi: M\times C(X, Y)\to\mathcal{P}(C(X, Y))$ を $\Phi(((C, \lambda), f))=\{g\in C(X, Y)\,|\,\forall x(x\in C\Longrightarrow g(x)\in U_\lambda(f(x)))\}$ によって定め $\Phi(((C, \lambda), f))=W_{(C,\lambda)}(f)$，$\Phi(M, f)=\mathfrak{W}_f$ とおけば $(C(X, Y), \mathcal{C}(X)\times\Lambda, \Phi)$ または $(C(X, Y), \mathfrak{W}_f)$ は一様空間となることが容易に確かめられる．このような一様性 Φ を $\Phi(X, Y, \varphi)$ と書こう．

問題 4.6　上のことを確かめよ．また X がコンパクトである場合には各 $(\lambda, f)\in\Lambda\times C(X, Y)$ に対して $W_\lambda(f)=\{g\in C(X, Y)\,|\,\forall x(x\in X\Longrightarrow g(x)\in U_\lambda(f(x)))\}$，$\mathfrak{W}_f{}^0=\{W\in\mathcal{P}(C(X, Y))\,|\,\exists\lambda(\lambda\in\Lambda\wedge W=W_\lambda(f))\}$ とおけば，$\mathfrak{W}_f{}^0$ $(f\in C(X, Y))$ も $C(X, Y)$ の一様性を与え，$\mathfrak{W}_f$ と $\mathfrak{W}_f{}^0$ は同値になることを示せ．

定理 4.6　X を Hausdorff 空間，(Y, Λ, φ) を一様空間とすると，$C(X, Y)$ のコンパクト開位相は一様性 $\Phi=\Phi(X, Y, \varphi)$ によって定まる位相と一致する．——

定理を証明するためにつぎの補題を用いる．

補題 4.1　X を正規空間，$\mathcal{U}=\{U_1, \cdots, U_n\}$ を X の有限開被覆とすると，X の閉集合 $V_1, \cdots, V_n$ で $V_i\subset U_i$ $(i=1, \cdots, n)$ しかも $X=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ を満たすものが存在する．

証明　$\mathcal{U}$ の任意の元，たとえば U_1 に対し X の開集合 U_1' をとり $U_1'\subset\bar{U}_1'\subset U_1$，しかも $X=U_1'\cup U_2\cup\cdots\cup U_n$ を成り立たせることができる．実際 $S=X-\bigcup_{i=2}^{n} U_i$ は閉集合で $S\subset U_1$，ゆえに X の開集合 U_1' で $S\subset U_1'\subset\bar{U}_1'\subset U_1$ を満た

すものがある！ こうして U_1 を U_1' で置き換え U_2 を U_2' で置き換えるという操作を n 回繰り返せば $X=\bigcup_{i=1}^{n} U_i'$. ここで $V_i=\bar{U}_i'$ とおけば補題が得られる. ∎

定理の証明 $C(X, Y)$ のコンパクト開位相を $\mathcal{O}$, Φ によって定まる一様位相を $\mathcal{O}'$ と書き，まず $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}$ となることを示そう. $f\in C(X, Y)$, C を X のコンパクト集合, $\lambda\in\Lambda$ としてこれらを固定しておく. ここで, $W_{(C,\lambda)}(f)$ が $\mathcal{O}$ に関する f の近傍となること，すなわち f を含む $\mathcal{O}$ の元 W があって $W\subset W_{(C,\lambda)}(f)$ となることを示せばよい. $f(C)$ は Y のコンパクト集合だから μ を Λ の任意の元とするとき C の有限個の元 x_i $(i=1, \cdots, n)$ を選べば $f(C)\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_\mu(f(x_i))$ となる. $f(x_i)=y_i$ とおこう. $V_i=f^{-1}(U_\mu(y_i))$ とおけば $\{V_1, \cdots, V_n\}$ は C の開被覆となる. C はコンパクト Hausdorff 空間だから正規であり，上の補題を用いれば V_i に部分集合として含まれるコンパクト集合 C_i をとって $C=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ を成り立たせるようにすることができる. $W=\bigcap_{i=1}^{n}(W(C_i, U_\mu(y_i))\cap C(X, Y))$ とおけば $f\in W$, $W\in\mathcal{O}$. ここで μ として適当なものをとれば $W\subset W_{(C,\lambda)}(f)$ となるのだが，いま $g\in W$ とし C の元 x が C_i に含まれるとすると $g(x)\in U_\mu(y_i)$, また $C_i\subset V_i$ だから $f(x)\in U_\mu(y_i)$ となることに注意しよう. さて始めに固定しておいた $\lambda\in\Lambda$ に対して Λ の元 ν を適当に選べば, $y, z, w\in Y$ に対して "$y\in U_\nu(z)\wedge z\in U_\nu(w)\Longrightarrow y\in U_\lambda(w)$" が成り立つ. ここで，さらに Λ の元 μ を適当に選べば $y, z\in Y$ に対して, "$y\in U_\mu(z)\Longrightarrow z\in U_\nu(y)$", "$U_\mu(y)\subset U_\nu(y)$" がともに成り立つ. このような μ に対して上の W を作り $g\in W$, $x\in C_i$ とすれば, $g(x)\in U_\nu(y_i)$, さらに $f(x)\in f(C_i)\subset U_\mu(y_i)$ だから $y_i\in U_\nu(f(x))$ が成り立つ. したがって, $g(x)\in U_\lambda(f(x))$. $C=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ だから C の任意の元 x に対して $g(x)\in U_\lambda(f(x))$ が成り立つ！ すなわち $W\subset W_{(C,\lambda)}(f)$ となる.

$\mathcal{O}\subset\mathcal{O}'$ が成り立つことを示すためには C を X のコンパクト集合, U を Y の開集合, $f\in W=C(X, Y)\cap W(C, U)$ とするとき, Λ の適当な元 μ を選べば $W_{(C,\mu)}(f)\subset W$ が成り立つことを示せばよい. $f(C)$ はコンパクト集合で $f(C)\subset U$ となる. いま $f(C)$ の元 y をとり, Λ の元 λ を $U_\lambda(y)\subset U$ となるように選ぼう. さらに，この λ に対し, Λ の元 ν を $z\in U_\nu(z')\wedge z'\in U_\nu(z'')\Longrightarrow z\in U_\lambda(z'')$ が Y の元 z, z', z'' に対して常に成り立つように選んでおく. これらの λ, ν を $\lambda(y), \nu(y)$ と書こう. ここで $\mathcal{U}$ として $U_{\nu(y)}(y)$ $(y\in f(C))$ 全体から成る集合をとれば $\mathcal{U}$ は $f(C)$ の開被覆となるから $f(C)$ の有限個の元 $y_1, \cdots, y_m$ が存在して

$f(C)\subset\bigcup_{i=1}^{m} U_{\nu_i}(y_i)$ となる $(\nu_i=\nu(y_i))$．Λ の元 μ を $z, z'\in Y$ に対して $z\in U_\mu(z')$ $\Longrightarrow z\in\bigcap_{i=1}^{m} U_{\nu_i}(z')$ が成り立つように選ぶ．すると，$f(C)$ の任意の元 y をとったとき $U_\mu(y)\subset U$ が成り立つ．実際，ここで $y\in U_{\nu_i}(y_i)$ を満たす i $(1\leqq i\leqq m)$ があるが，$U_\mu(y)\subset U_{\nu_i}(y)$，また $z\in U_{\nu_i}(y)$ とすれば $y\in U_{\nu_i}(y_i)$ より $z\in U_{\lambda_i}(y_i)$ $\subset U$ $(\lambda_i=\lambda(y_i))$，したがって $z\in U$ だから $U_\mu(y)\subset U_{\nu_i}(y)\subset U$，ゆえに $U_\mu(y)$ $\subset U$ が成り立つ．さて $g\in W_{(C,\mu)}(f)$ とすれば C の任意の元 x に対して $g(x)$ $\in U_\mu(f(x))\subset U$，ゆえに $g\in W$ が成り立つ．∎

X を位相空間，(Y, Λ, φ) を一様空間 $(\varphi(\lambda, y)=U_\lambda(y))$ とし，さらに $(A, \prec)$ を有向集合，$(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ を $C(X, Y)$ の有向点列とする．さらに，$C(X, Y)$ の元 f があって $\lim_{\alpha\in A} f_\alpha(x)=f(x)$ が X の各元 x に対して成り立っているとする．X の部分集合 S に対し，

$$\forall\lambda[\lambda\in\Lambda\Longrightarrow\exists\alpha[\forall\beta\forall x(\beta\in A\wedge\alpha\prec\beta\wedge x\in S\Longrightarrow f_\beta(x)\in U_\lambda(f(x)))]]$$

が成り立つとき，$(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ は S において**一様に** f に収束するという．定理4.6から直ちにわかるように，X を Hausdorff 空間，Y を一様空間とするとき $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ が X の任意のコンパクト集合において一様に f に収束するための必要十分条件は $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ が $C(X, Y)$ のコンパクト開位相に関して f に収束することである．

問題 4.7 上のことを確かめよ．——

X をコンパクト Hausdorff 空間とすると，$C(X)=C(X, \boldsymbol{R})$ は§3.5で述べたように距離空間となるが，定理4.6からわかるように $C(X)$ の距離空間としての位相は，$C(X, \boldsymbol{R})$ のコンパクト開位相と一致する(問題4.6参照)．

§4.5 $C(X)$ の構造

X をコンパクト Hausdorff 空間，$C(X)=C(X, \boldsymbol{R})$ とする．

定理 4.7 $C(X)$ は完備距離空間である．

証明 $C(X)$ の Cauchy 列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ をとろう．$\|f_n-f_m\|=\sup_{x\in X}\{|f_n(x)-f_m(x)|\}$ は n, m が十分大きいとき0に近づくから，X の各元 x に対して $(f_n(x))_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{R}$ の Cauchy 列となる．写像 $f: X\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおいて定めると $f\in C(X)$ しかも $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ となることが示される．そのため ε を任意の正の実数，$x_0\in X$ とし，まず x_0 の適当な近傍 U を選べば $y\in U\Longrightarrow|f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$

が成り立つことを示そう．自然数 N を十分大きくとれば $N\leqq n$ を満たす任意の自然数 n について $\|f_n-f_N\|<\varepsilon/3$ となる．このとき X の各元 x について $|f(x)-f_N(x)|\leqq\varepsilon/3$ となる（読者自ら確かめられたい）．さて f_N は連続なので x_0 の適当な近傍 U を選べば $y\in U\Longrightarrow|f_N(x_0)-f_N(y)|<\varepsilon/3$ となり，

$$|f(x_0)-f(y)|\leqq|f(x_0)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<\varepsilon,$$

ゆえに $f\in C(X)$．また上の議論から N を十分大きくとれば $|f(x)-f_N(x)|<\varepsilon$ が X の任意の元 x について成り立つから $(f_n)_{n\in N}$ は f に収束する．▌

例 4.3 D を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合，$(x_0, y_0)\in D$, $f\in C(D)$ とし，さらに正の実数 M があって，(x, y_1), $(x, y_2)\in D$ のとき

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqq M|y_1-y_2| \qquad \text{(Lipschitz 条件)}$$

が満たされているとする．このとき微分方程式

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

は初期条件

$$\text{(B)} \qquad y(x_0)=y_0$$

の下で一意的な解 $y=\varphi(x)$ を持つ．すなわち適当な $c>0$ をとると，$[x_0-c, x_0+c]$ から $\boldsymbol{R}$ への連続写像 φ が一意的に存在し，$y=\varphi(x)$ とおくと (A), (B) が満たされる（ただし (A) は $x\in(x_0-c, x_0+c)$ についての条件）．

［証明］ (A), (B) を満たす $y=\varphi(x)$ は明らかに積分方程式

$$\text{(C)} \qquad \varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t, \varphi(t))\,dt$$

の解となる．逆に (C) の解 $y=\varphi(x)$ は (A), (B) を満たす．いま U として (x_0, y_0) を含む $\boldsymbol{R}^2$ の有界開集合で $\bar{U}\subset D$ となるようなものをとろう．$\bar{U}$ はコンパクトだから $k\geqq|f(x, y)|$ $((x, y)\in\bar{U})$ を満たすような k がある．さてここで $c>0$ として

(i) $\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid |x-x_0|\leqq c\wedge|y-y_0|\leqq kc\}\subset\bar{U}$

(ii) $Mc<1$

という条件を満たすものをとろう．また $[x_0-c, x_0+c]$ から $\boldsymbol{R}$ への連続写像全体の作る完備距離空間 $C([x_0-c, x_0+c])=C$ の部分空間 C^* として

$$C^*=\{\psi\in C \mid \forall x(x\in[x_0-c, x_0+c]\Longrightarrow|\psi(x)-y_0|\leqq kc)\}$$

をとろう．C^* は C の閉集合だから完備である．さて C^* からそれ自身への写像 F を，

$$F(\psi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt \qquad (x \in [x_0 - c, x_0 + c])$$

によって定めることができる．実際 $F(\psi) = \tilde{\psi}$ とおけば

$$|\tilde{\psi}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt \right| \leqq kc,$$

ゆえに $F(\psi) \in C^*$．さらに $\psi_1, \psi_2 \in C^*$ のとき

$$\|F(\psi_1) - F(\psi_2)\| = \sup \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, \psi_1(t)) - f(t, \psi_2(t)))\,dt \right|$$
$$\leqq Mc \sup |\psi_1(x) - \psi_2(x)| = Mc \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

ここで $Mc < 1$ だから F は縮小写像である．したがって縮小写像の原理（定理 1.6）により $F(\varphi) = \varphi$ となる C^* の元，すなわち積分方程式 (C) の解が一意的に存在する．▮

X をコンパクト Hausdorff 空間とすると，$C(X)$ は完備距離空間だがコンパクトではない．実際 $C(X)$ の元の列 $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ として $f_n(x) = n$ $(x \in X)$ によって定まる‘定数関数’の列をとれば $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ は集積点を持たない！ では $C(X)$ の有界部分集合は相対コンパクトだろうか．

$C(X)$ についてさらに調べるために，$C(X)$ よりもさらに広く，X から $\boldsymbol{R}$ への有界写像 f 全体の成す集合 $B(X)$ を考えよう（$f \in B(X)$ とは f が X から $\boldsymbol{R}$ への写像で，$f(X)$ が $\boldsymbol{R}$ の有界部分集合となることを意味する）．$C(X) \subset B(X)$ となる．また，$f, g \in B(X)$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$ のとき $f+g$, fg, αf を $C(X)$ の場合と同様に定義すれば，それらはみな $B(X)$ に属し，$B(X)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環となる．さらに，$f \in B(X)$ に対して $\|f\| = \sup\{\alpha \in \boldsymbol{R} \mid \exists x (x \in X \wedge \alpha = |f(x)|)\}$ とおき，$f, g \in B(X)$ に対して $d(f, g) = \|f - g\|$ とおけば，$(B(X), d)$ は距離空間となる．

一般に $B(X)$ の部分集合 S が有界ならば，適当な正の実数 M があって $B(X)$ に属する任意の f について $\|f\| < M$，ゆえに X の任意の元 x について $|f(x)| < M$ が成り立つ．このとき S は**一様有界** (uniformly bounded) であるともいう．

一様有界な連続写像の集合として例えば $C([0, \pi])$ の部分集合

$$S = \{f \in C([0, \pi]) \mid \exists k [k \in \boldsymbol{N} \wedge \forall x (x \in [0, \pi] \Longrightarrow f(x) = \sin kx)]\}$$

をとろう．$\sin kx-\sin lx=2\cos((k+l)/2)x\sin((k-l)/2)x$ であるから $\|\sin kx-\sin lx\|$ $(x\in[0,\pi])$ は k,l $(k\neq l)$ が増大しても 0 に近づくことはない．したがって S は相対コンパクトではない．こうして一般に $C(X)$ の部分集合 S が相対コンパクトとなるためには単に S が有界となるのみではなく，S に属する写像が'一斉に''似通った'振舞いをすることが必要であるようである．

一般に X を位相空間，S を $B(X)$ の部分集合とする．ここで，任意の正の実数 ε と X の任意の元 x が与えられたとき，ε と x によって定まる x の近傍 $U=U(\varepsilon,x)$ があり

$$\forall f\forall y(f\in S\wedge y\in U(\varepsilon,x)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

が成り立てば S は (X で) **同程度連続** (equi-continuous) であるという．上の例 $C([0,\pi])$ において $\sin kx$ $(k\in \boldsymbol{N})$ 全体の集合 S は一様有界だが同程度連続ではない．また X の定数関数 f_n $(f_n(x)=n)$ 全体の集合は同程度連続だが一様有界ではない．

定理 4.8 (Ascoli-Arzelà) X をコンパクト Hausdorff 空間，$S\subset C(X)$ とする．S が $C(X)$ の中で相対コンパクトであるための必要十分条件は S が一様有界かつ同程度連続であることである．

証明 $\bar{S}$ がコンパクトならば $\bar{S}$ は全有界，したがって有界すなわち一様有界である．S がこのとき同程度連続であることを示そう．$x_0\in X$, $\varepsilon>0$ とすると $\bar{S}$ は有限個の $\varepsilon/3$ 球 $U_{\varepsilon/3}(f_1),\cdots,U_{\varepsilon/3}(f_n)$ で覆われる．いま各 f_i $(1\leqq i\leqq n)$ について x_0 の十分小さい近傍 U_i をとり

$$x\in U_i\Longrightarrow|f_i(x_0)-f_i(x)|<\varepsilon/3$$

が成り立つようにしよう．$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ とする．いま $g\in S$ とすれば $g\in U_{\varepsilon/3}(f_i)$ を満たす f_i があり，X の任意の元 x に対して $|g(x)-f_i(x)|<\varepsilon/3$ となる．ここで $x\in U$ のとき

$$|g(x_0)-g(x)|\leqq|g(x_0)-f_i(x_0)|+|f_i(x_0)-f_i(x)|+|f_i(x)-g(x)|,$$

ゆえに $|g(x_0)-g(x)|<\varepsilon$．すなわち S は同程度連続である．

逆に S が一様有界かつ同程度連続としよう．$\bar{S}$ は完備距離空間 $C(X)$ の閉集合だから $\bar{S}$ も完備である．ゆえに $\bar{S}$ が全有界であることを示せば定理が証明される．$\varepsilon>0$ とする．まず X の各元 x に対して x の十分小さい近傍 U_x をとり

$$y\in U_x\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon/4$$

が S の任意の元 f に対して成り立つようにしよう．X はコンパクトだから有限個の $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ があり $X=\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ となる．さて S は有界だから $k>0$ を適当にとれば，S の任意の元 f に対して $\|f\|\leqq k$ が成り立つ，ゆえに $x\in X,\ f\in S\Longrightarrow |f(x)|\leqq k$．このような k として $k=N\varepsilon/4\ (N\in \boldsymbol{N})$ と表わされるものをとることができる．いま $\boldsymbol{Z}^m$ の元 $(l_1, \cdots, l_m)$ を $-N\leqq l_i<N$ を満たすようにとり

$$S(l_1, \cdots, l_m)=\{f\in S\mid l_i\varepsilon/4\leqq f(x_i)\leqq (l_i+1)\varepsilon/4\ (1\leqq i\leqq m)\}$$

とおこう．$S(l_1, \cdots, l_m)$ の中で空集合とは異なるものを $S_1, \cdots, S_M$ とおけば $M\leqq (2N)^m$ また $S=\bigcup_{j=1}^{M} S_j$．ここで $S_1, \cdots, S_M$ の元を一つずつ選び，それらを $f_1, \cdots, f_M$ としよう．$f\in S_j$ とすると $x\in U_{x_i}$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)-f_j(x)| &\leqq |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f_j(x_i)|+|f_j(x_i)-f_j(x)|\\ &< 3\varepsilon/4,\end{aligned}$$

ゆえに $\|f-f_j\|<\varepsilon$，したがって S は $f_1, \cdots, f_M$ を中心とする ε 球によって覆われる．▌

問題 4.8 X をコンパクト Hausdorff 空間，$(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ を $C(X)$ の元の列で

(i) $f_n(x)\leqq f_{n+1}(x) \quad (n\in \boldsymbol{N},\ x\in X)$

(ii) $C(X)$ の元 f があり X の各元 x について $(f_n(x))_{n\in \boldsymbol{N}}$ は $f(x)$ に収束する

の2条件を満たすものとする．このとき $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は f に収束することを示せ．

[ヒント] $f_n\ (n\in \boldsymbol{N})$ 全体の集合 S は一様有界かつ同程度連続であることを示し Ascoli-Arzelà の定理を用いる．――上の命題は **Dini の定理**として知られる．――

さて X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$\alpha\in \boldsymbol{R}$ を一つ定めたとき $B(X)$ の元 f を αf に対応させる $B(X)$ からそれ自身への写像は連続である．また，$B(X)\times B(X)$ の元 (f, g) を，$B(X)$ の元 $f+g$ または fg へ対応させる写像もそれぞれ連続である(読者はこれらのことを確かめられたい)．

$B(X)\ni f, g$ に対して X から $\boldsymbol{R}$ への写像 $f\vee g,\ f\wedge g$ を

$$\left.\begin{aligned}(f\vee g)(x)&=(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)/2\\ (f\wedge g)(x)&=(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)/2\end{aligned}\right.\qquad (x\in X)$$

とおいて定めよう．$f\vee g,\ f\wedge g$ はまた $B(X)$ の元となり，

$$(f\vee g)(x)=\max\{f(x), g(x)\}, \qquad (f\wedge g)(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

が成り立つ．$f, g \in C(X)$ ならば $f \vee g, f \wedge g$ も $C(X)$ に含まれる．$f, g, h \in B(X)$ のとき $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ となる．$(f \vee g) \vee h = f \vee g \vee h$ と書く．$f \wedge g \wedge h$ についても同様である．また3個以上の有限個の $B(X)$ の元 $f_1, \cdots, f_n\ (n>2)$ についても

$$(f_1 \vee \cdots \vee f_{n-1}) \vee f_n = f_1 \vee \cdots \vee f_n$$
$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-1}) \wedge f_n = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$$

と書くことにする．

一般に $C(X)$ の $\boldsymbol{R}$ 部分ベクトル空間 V は，

$$f, g \in V \Longrightarrow f \vee g, f \wedge g \in V$$

となるとき $C(X)$ の**部分ベクトル束** (sub vector lattice) であるといわれる．

定理 4.9　コンパクト Hausdorff 空間 X および $C(X)$ の部分ベクトル束 V が与えられたとし，しかも

(i)　V が定数関数 1 $(1(x)=1\ (x \in X))$ を含む

(ii)　X の任意の相異なる元 x, y に対し V の元 f で x, y を'分離する'もの，すなわち $f(x) \neq f(y)$ を満たすものがある

という2条件が満たされているならば $\bar{V} = C(X)$ である．

証明　まず条件 (i) および，V がベクトル空間となるという仮定から，V は任意の定数関数 α $(\alpha \in \boldsymbol{R},\ \alpha(x)=\alpha\ (x \in X))$ を含む．$(\alpha = \alpha 1$ である.)　また (ii) を用いると，X の任意の相異なる元 x, y および $\boldsymbol{R}$ の元 α, β を与えたとき，V の元 f を適当にとれば $f(x)=\alpha,\ f(y)=\beta$ が満たされることがわかる．実際，このとき x, y を分離する V の元 f_0 をとり

$$f = \alpha + (\beta - \alpha)(f_0 - f_0(x))/(f_0(y) - f_0(x))$$

とおけばよい！　さて $g \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ をそれぞれ任意にとると X の各元 x に対して V の元 f_x を選んで，$f_x(x_0) = g(x_0)$，$f_x(x) = g(x)$ が成り立つようにすることができる．ここで x の十分小さい近傍 U_x をとれば $y \in U_x \Longrightarrow f_x(y) < g(y) + \varepsilon$ となる．こうして X の各元 x に対して V の元 f_x と x の近傍 U_x を選んでおく．X はコンパクトだから有限個の X の元 $x_1, \cdots, x_n$ があり，$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ $(U_i = U_{x_i})$．ここで $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ $(f_i = f_{x_i})$ とおけば $f(x_0) = g(x_0)$，さらに X の任意の元 x に対して

$$f(x) < g(x) + \varepsilon.$$

こうして得られる V の元 f を改めて h_{x_0} と書こう．すると x_0 の十分小さい近傍 W_0 をとれば $y\in W_0 \Longrightarrow h_{x_0}(y)>g(y)-\varepsilon$．こうして X の各元 x に対して V の元 h_x と x の近傍 W_x が得られ，

$$y\in X \Longrightarrow h_x(y)<g(y)+\varepsilon;\qquad y\in W_x \Longrightarrow g(y)-\varepsilon<h_x(y)$$

が成り立つ．X がコンパクトであることを再び用いると $X=\bigcup_{j=1}^{m} W_j$ ($W_j=W_{x_j}$, $x_j\in X$)．ここで $h=h_1\vee\cdots\vee h_m$ ($h_j=h_{x_j}$) とおけば，X の任意の元 x に対して

$$g(x)-\varepsilon<h(x)<g(x)+\varepsilon.$$

また $h\in V$ だから定理が成り立つ．▌

X として特に $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合をとろう．F を n 変数実係数多項式とすると，$C(X)$ の元 f として X の各元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ に

$$f(x)=F(x_1, \cdots, x_n)$$

を対応させるものをとることができる．このような f を X の‘多項式関数’と呼び，それらの全体から成る $C(X)$ の部分集合を $P(X)$ と書こう．$P(X)$ は $C(X)$ の部分環で定数関数 1 を含み X の異なる 2 点を分離する．$P(X)$ は一般に $C(X)$ の部分ベクトル束になるだろうか．答は残念ながら‘否’である．たとえば $X=[-1,1]$ としたとき X の各元 x に x 自身を対応させる対応 f は $P(X)$ の元であり，定数関数 $0=0\cdot 1$ も $P(X)$ に含まれるが，$(f\vee 0)(x)=\max\{x,0\}$ は $P(X)$ の元ではない！　ところがここでつぎの命題が成り立つ．

補題 4.2　X をコンパクト Hausdorff 空間，P が $C(X)$ の $\boldsymbol{R}$ 部分多元環で定数関数 1 を含むものとすれば，$\bar{P}$ は $C(X)$ の部分ベクトル束となる．

証明　$f, g\in P$ のとき $f\vee g=(f+g+|f-g|)/2$, $f\wedge g=(f+g-|f-g|)/2$ だから $|f-g|\in\bar{P}$ がいえれば $f\vee g, f\wedge g\in\bar{P}$. また $C(X)\times C(X)$ の元 (f,g) に $C(X)$ の元 $f\vee g$ (または $f\wedge g$) を対応させる写像は明らかに連続だから，“$f, g\in P\Longrightarrow f\vee g, f\wedge g\in\bar{P}$” が成り立てば ($\bar{P}$ は完備距離空間だから) “$\tilde{f}, \tilde{g}\in\bar{P}\Longrightarrow\tilde{f}\vee\tilde{g}, \tilde{f}\wedge\tilde{g}\in\bar{P}$” も成り立ち，$\bar{P}$ が $C(X)$ のベクトル束となることが導かれる．したがって，$f\in P\Longrightarrow|f|\in\bar{P}$ を示せばよい．ここで特に X として $[0,1]$, P として $[0,1]$ の多項式関数全体から成るものをとり，X の元 x に $\sqrt{x}$ を対応させる写像 f が $\bar{P}$ に含まれることを示し，その事実を一般の場合にも用いて一般の場合に “$f\in P\Longrightarrow|f|\in\bar{P}$” が成り立つことを示すことにしよう．

まず φ_1 を定数関数 0，$\varphi_2(x)=x/2$，一般に

(4.1)　$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)+(x-\varphi_n(x)^2)/2 \qquad (x\in[0,1],\ n\in \boldsymbol{N})$$

とおけば $\varphi_n\in P([0,1])$．ここで $\varphi_n(x)\leqq\varphi_{n+1}(x)$，$\varphi_n(x)\leqq\sqrt{x}$ $(x\in[0,1],\ n\in \boldsymbol{N})$ が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}\sqrt{x}-\varphi_{n+1}(x)&=\sqrt{x}-\varphi_n(x)-(\sqrt{x}-\varphi_n(x))(\sqrt{x}+\varphi_n(x))/2\\&=(\sqrt{x}-\varphi_n(x))(1-(\sqrt{x}+\varphi_n(x))/2).\end{aligned}$$

ここで $\varphi_n(x)\leqq\sqrt{x}$ とすれば

$$\sqrt{x}+\varphi_n(x)\leqq 2\sqrt{x}\leqq 2 \qquad (x\in[0,1]).$$

ゆえに n に関する帰納法により $\varphi_n(x)\leqq\sqrt{x}$ $(n\in\boldsymbol{N})$．さらに

$$\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)=(x-\varphi_n(x)^2)/2$$

だから $\varphi_n(x)\leqq\varphi_{n+1}(x)$ が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ が各 $x\in[0,1]$ について存在するが，(4.1) により $\varphi(x)^2=x$，ゆえに $\varphi(x)=\sqrt{x}$．

さて一般の場合にもどって $f\in P$ としよう．$\|f\|=0$ ならば $f=0$ だから $|f|=0\in P$．$\|f\|>0$ のときは X の任意の元 x に対して $f(x)^2/\|f\|^2\in[0,1]$．ここで上に述べた多項式関数 φ_n を用いて

$$\varphi_n(f(x)^2/\|f\|^2)=f_n(x) \qquad (x\in X)$$

とおけば $f_n\in P$．また

$$\begin{aligned}&f_n(x)\leqq f_{n+1}(x) \qquad (x\in X,\ n\in\boldsymbol{N}),\\&\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sqrt{f(x)^2/\|f\|^2}=|f(x)|/\|f\| \qquad (x\in X)\end{aligned}$$

がともに成り立つから Dini の定理 (問題 4.8) により $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $|f|/\|f\|$ に収束する．したがって $|f|\in\bar{P}$．▌

定理 4.10 (Stone-Weierstrass の定理)　X をコンパクト Hausdorff 空間，P を $C(X)$ の $\boldsymbol{R}$ 部分多元環とし，P は定数関数 1 を含み，X の任意の 2 元を分離するものとすると $\bar{P}=C(X)$．

証明　上の補題により $\bar{P}$ は $C(X)$ の部分ベクトル束となる．$\bar{P}$ は X の任意の 2 元を分離するから定理 4.9 により $\bar{\bar{P}}=\bar{P}=C(X)$．▌

例 4.4　X を $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合，$P(X)$ を X の多項式関数全体から成る $C(X)$ の部分集合とすると $\overline{P(X)}=C(X)$，すなわち f を X から $\boldsymbol{R}$ への任意の連続写像とし ε を任意の正の実数とすると，X の多項式関数 φ があり，X の任

意の元 x に対して $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ が成り立つ．

例 4.5　$f\in C(\boldsymbol{R})$ は $f(x+1)=f(x)$ $(x\in\boldsymbol{R})$ が成り立つとき $\boldsymbol{R}$ 上の‘周期1の連続関数’と呼ばれる．いま $\boldsymbol{R}$ から1次元トーラス $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の上への標準的射影を ϖ と書けば，上のような関数 f が与えられたとき $\boldsymbol{T}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 f^* を $f^*(\varpi(x))=f(x)$ を満たすように定めることができる．f^* は容易に確かめられるように $C(\boldsymbol{T})$ の元となる．上のような f として特に

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\sin 2\pi kx+\sum_{l=0}^{m}b_l\cos 2\pi lx \qquad (a_k,b_l,x\in\boldsymbol{R})$$

のように表わされるものがとれる．このような f の全体から成る集合を $\varDelta(\boldsymbol{R})$ と書けば，

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

からわかるように $\varDelta(\boldsymbol{R})$ は $C(\boldsymbol{R})$ の $\boldsymbol{R}$ 部分多元環となる．$\varDelta(\boldsymbol{T})=\{\varphi\in C(\boldsymbol{T})\mid \exists f(f\in\varDelta(\boldsymbol{R})\wedge\varphi=f^*)\}$ とおこう．$\varDelta(\boldsymbol{T})$ は $C(\boldsymbol{T})$ の $\boldsymbol{R}$ 部分多元環で定数関数1を含み，$\boldsymbol{T}$ の任意の2元を分離するから $\overline{\varDelta(\boldsymbol{T})}=C(\boldsymbol{T})$．したがって，$f$ を任意の $\boldsymbol{R}$ 上の周期1の連続関数とし，ε を任意の正の実数とすると $\varDelta(\boldsymbol{R})$ の元 φ があり，$\boldsymbol{R}$ の任意の元 x に対して $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ が成り立つ．

終章　圏と関手

第4章の終りに述べたように，コンパクト Hausdorff 空間 X 上の実連続関数多元環 $C(X)$ はさまざまの興味深い性質を持つ．また定理 3.17 で述べたように，F を X からコンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像とするとき，写像 $F^*: C(Y)\to C(X)$ を $F^*(g)(x)=(g\circ F)(x)$ $(x\in X)$ とおいて定めれば F^* は多元環の準同型写像となり，特に F が位相写像となるための必要十分条件は F^* が $C(Y)$ から $C(X)$ の上への同型写像となることである．また一般に G を Y からコンパクト Hausdorff 空間 Z への連続写像とすれば，$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$ となる．このように，一見まったく異なったタイプの2種類のものの集まり，一つはコンパクト Hausdorff 空間，もう一つは $\boldsymbol{R}$ 上の多元環という2種類のものの間に驚くべき平行的な関係が見出される．

自然界でも，たとえば星々の世界とミクロの原子の世界との間には平行的な類似性があるといわれる．ここで，‘星々の世界’という場合，星々は一つ一つが孤立してあるのではなく，互いに相互作用をし合って一つの‘世界’を成しているのであり，これは‘原子の世界’についても同様である．そして，‘星々の世界’と‘原子の世界’の間に類似性があるという場合，一つ一つの星と一つ一つの素粒子とが対応づけられるだけでなく，星々の間の相互関係と，素粒子の間の相互関係についても平行的な対応がつけられるということを意味するわけである．上に述べた例では，コンパクト Hausdorff 空間 $X, Y, Z, \cdots$ の世界 $\mathscr{C}$ と，$\boldsymbol{R}$ 上の多元環の世界 $\mathscr{A}$ があり，$\mathscr{C}$ に属する X から $\mathscr{A}$ に属する $C(X)$ への対応が考えられた．$\mathscr{C}$ において $X, Y, Z, \cdots$ の間に‘橋をかける’相互関係を与えるものとして連続写像 $F: X\to Y$, $G: Y\to Z$, $\cdots$ があり，$\mathscr{A}$ においては多元環の間の準同型写像が $\mathscr{A}$ に属するものの間に‘橋をかける’．X から $C(X)$ への対応から‘自然に’$F, G, \cdots$ から $F^*, G^*, \cdots$ への対応が導かれ，$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$ であった．こうして，$X, Y, Z, \cdots$ を $C(X), C(Y), C(Z), \cdots$ へ対応させることによって，いわば $\mathscr{C}$ は $\mathscr{A}$ という鏡の中に‘左右をとり換えて’写し出される．このように2種類の世界の間に平

行的な関係が見られることは，数学ではしばしばおこる．このような現象を統一的に記述するために圏と関手の概念が用いられる．数学的対象が相互関係を持ちつつ或る‘世界’を成しているとき，その‘世界’あるいは‘相互関係の総体’を‘圏’といい，関手は二つの圏の間の‘橋’のようなものであるが，圏としてはたとえば‘集合全体の作る世界’のようなものを考えるので，集合ではない数学的対象，すなわち族，またはクラスなどと呼ばれるものを考えの対象にすえることが必要になる．

本書では第I部§1.2以降，これまですべてZermelo-Fraenkelの集合論の範囲内で議論を進めて来たが，圏と関手について考えるためには‘クラス’についても述べなければならない．もう与えられた紙数も終りに近いので，ごく手短かに述べよう．(以下の記述についてはJ. D. Monk, "Introduction to Set Theory", McGraw-Hill (1969) を参考にした.)

クラス (class) とは以下に述べる諸公理を満たす数学的対象で，$A, B, \cdots, X, Y, \cdots$ などの文字によって表わされる．クラス A, B について $A \in B$ または $\neg(A \in B)$ ——それを $A \notin B$ と書く——が成り立ち，$A \in B$ (これを $B \ni A$ とも書く) のとき A は B に**属する**または A は B の**元**であるという．クラスは，まずつぎの公理C1) を満たす．

C1) (外延性公理) $\forall A \forall B[A=B \Leftrightarrow \forall X(X \in A \Leftrightarrow X \in B)]$.

クラス A は，$A \in B$ を満たすクラス B が存在するとき**集合**と呼ばれる．以下集合はもっぱら $a, b, \cdots, x, y, \cdots$ などの文字で表わすことにする．集合はZermelo-Fraenkelの公理S1)-S10) を満たす．(第I部参照．ただしS1) は上のC1) から導かれ，S6) (分出公理) は第I部終章で述べたようにZermelo-Fraenkelの他の諸公理から導かれる.)

クラスを集合の概念からきわ立たせるものはつぎの公理である．

C2) (クラス構成公理) $\exists A \forall X(X \in A \Leftrightarrow X$ は集合 $\wedge P(X))$.

ただし命題 $P(X)$ は A を変数として含まない．

C2) によって存在を保証されるクラス A を記号的に

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

と書く．たとえば，$V=\{x \mid x=x\}$ は集合全体から成るクラスである．第I部で述べたように V は集合ではない．こうしてC2) を用いて集合よりも‘広い’いろ

いろなクラスが作られるが，それらのクラスは集合から成り，しかもそれらの構成メンバーたちは一定の命題を満たすものとされる．(たとえば‘クラス全体の集まり’というようなものは C2) によっては構成されず，クラスの仲間から除外される.)

C2) によって $\{x \mid x \neq x\}$ もまたクラスとなる．これは‘空クラス’と呼ばれ，仮に $\tilde{\phi}$ と書かれるが，ここでさらにつぎの公理が成り立つことを仮定する：

C3) (無限公理)　　$\exists a[\tilde{\phi} \in a \wedge \forall X(X \in a \Longrightarrow X^+ \in a)]$.

したがって $\tilde{\phi}$ は集合であり，その定義から空集合 ϕ に他ならない．(集合論の空集合の存在公理 S2) および無限公理 S5) はこうして C2), C3) から導かれる.)

クラスはさらにつぎの公理を満たす．

C4) (正則性公理)　　$\forall A[A \neq \phi \Longrightarrow \exists b(b \in A \wedge b \cap A = \phi)]$.

これら C1)-C4) および集合に関する公理(非順序対の存在公理，合併集合の公理，べき集合の公理，選出公理および置換公理)の九つの公理系を満たすものとしてクラス(および集合)の概念が規定されるのである．(上記の諸公理については，特に選出公理について第I部に述べたもの以外の形の命題をとることも考えられている．これらのことについては，たとえば上述の Monk の本を見られたい.)

A, B をクラスとするとき $C = \{x \mid \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}$ はまたクラスとなるが，$C = A \times B$ と書いてこれを A, B の‘直積クラス’と呼ぼう．A, B, C をクラスとするとき $(A \times B) \times C$ を $A \times B \times C$ と書き，その元 $((a, b), c)$ を (a, b, c) と書く．

A, B をクラスとするとき $\forall X(X \in A \Longrightarrow X \in B)$ が成り立つとき $A \subset B$ (または $B \supset A$) と書き A は B に**部分クラス**として含まれる，または A は B の**部分クラス**であるという．

$A \times B$ の部分クラス F が与えられ，

$$(x, y) \in F \wedge (x, y') \in F \Longrightarrow y = y'$$

が成り立つとき‘A から B への関数 F’が与えられたといい，A の元 x に対して $(x, y) \in F$ のとき上の命題で一意的存在を保証される B の元 y を $y = F(x)$ と書く．集合の場合と同様に，A の任意の元 x に対して B の元 $y = F(x)$ が存在するならば，F は A から B への‘写像’と呼ばれる．

さて，'圏'の定義を与えよう．クラス M, O および M から $O\times O$ への写像 π が与えられ，さらに $M\times M$ から M への関数 F が与えられて，以下の命題 (Cat 1)-(Cat 3) が満たされているとき M を**圏** (category) と呼ぶ．

(Cat 1) M の元 α, β に対し，$\pi(\alpha)=(x, y)$，$\pi(\beta)=(y, z)$ のとき $F(\alpha, \beta)=\gamma$ となるような $\gamma\in M$ が存在し，$\pi(\gamma)=(x, z)$ となる．このとき $\gamma=\beta\alpha$ と書く

(Cat 2) M の元 α, β, γ に対して $\pi(\alpha)=(x, y)$，$\pi(\beta)=(y, z)$，$\pi(\gamma)=(z, u)$ ならば，$\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha$

(Cat 3) O の任意の元 x に対して M の元 i_x が存在し，$\pi(i_x)=(x, x)$，さらに $\alpha\in M$，$\pi(\alpha)=(x, y)$ のとき $\alpha i_x=\alpha=i_y\alpha$ が成り立つ．

上で，M の元 $\alpha, \beta, \cdots$ は圏の**射** (morphism)，O の元 $x, y, \cdots$ は圏に付随する**対象** (object) と呼ばれ，O は M の**対象クラス** (object class) と呼ばれる．π を M の'射影'，F を M の'合成'と呼ぼう．また x, y が対象であるとき

$$\mathrm{Hom}(x, y) = \{\alpha \mid \alpha\in M \wedge \pi(\alpha)=(x, y)\}$$

と書く．$\alpha\in\mathrm{Hom}(x, y)$ のとき x を α の**定義域** (domain)，y を α の**値域** (range) と呼ぶ．(Cat 3) で述べられた i_x を x の**恒等射** (identity morphism) と呼ぶ．

上の定義から見られるように，圏 M は対象クラス O と切り離しては考えられないので，M を'O を対象クラスとする圏'とも呼ぶ．

たとえば O としてすべての位相空間から成るクラス，M として位相空間 x から位相空間 y への連続写像 α（または α, x, y の順序対 (α, x, y)）全体から成るクラスをとれば，M は O を対象クラスとする圏となる．($\pi((\alpha, x, y))=(x, y)$，$F(\alpha, \beta)$ は写像 α, β の合成，$i_x=1_x$ とする.) この圏は'位相空間の圏'と呼ばれ，***Top*** とも記される．

O としてコンパクト Hausdorff 空間全体から成るクラス，M として $O\times O$ の元 (x, y) を任意にとったとき x から y への連続写像 α（または (α, x, y)）全体から成るクラスをとれば'コンパクト Hausdorff 空間の圏' ***CH*** が得られる．

群の圏 ***Grp***，***R*** 上多元環の圏 $\boldsymbol{Alg_R}$ も同様にして得られる．***Grp*** の対象クラスは群全体から成るクラス，***Grp*** の各元は群の準同型写像である．また $\boldsymbol{Alg_R}$ の対象クラスは ***R*** 多元環全体から成るクラス，$\boldsymbol{Alg_R}$ の各元は ***R*** 多元環の準同型写像である．

さて，O, O' を対象クラスとする圏 M, M' が与えられ，さらに O から O' への写像 T，M から M' への写像 U が与えられて以下の命題 (F 1)-(F 3) が満たされているとき U を圏 M から M' への**共変関手** (covariant functor) と呼び，T を U に付随する**対象関数** (object function) と呼ぶ．

(F 1)　$\alpha \in M,\ \pi(\alpha)=(x, y),\ \pi'(U(\alpha))=(x', y') \Longrightarrow x'=T(x),\ y'=T(y)$
　(ただし π, π' は M, M' の射影)

(F 2)　$x \in O$ のとき $U(i_x)=i_{T(x)}$

(F 3)　$\alpha, \beta \in M,\ \pi(\alpha)=(x, y),\ \pi(\beta)=(y, z)$ のとき

$$U(\beta\alpha) = U(\beta)\,U(\alpha).$$

たとえば群の圏 $\boldsymbol{Grp}$，位相空間の圏 $\boldsymbol{Top}$ をとり，群 G に対して G の Krull 空間 (G, Cl) を対応させる写像を T，群の準同型 $\alpha: G \to H$ を Krull 空間の連続写像 $\alpha: G \to H$ に対応させる写像を U とおけば (F 1)-(F 3) は満たされ，したがって U は $\boldsymbol{Grp}$ から $\boldsymbol{Top}$ への共変関手となる (例 2.4)．

一方，O, O' を対象クラスとする圏 M, M'，O から O' への写像 T，M から M' への写像 U が与えられ，つぎの (F′ 1)-(F′ 3) が満たされているとき，U は T を対象関数とする M から M' への**反変関手** (contravariant functor) であるという．

(F′ 1)　$\alpha \in M,\ \pi(\alpha)=(x, y),\ \pi'(U(\alpha))=(x', y') \Longrightarrow x'=T(y),\ y'=T(x)$

(F′ 2)　$x \in O$ のとき $U(i_x)=i_{T(x)}$

(F′ 3)　$\alpha, \beta \in M,\ \pi(\alpha)=(x, y),\ \pi(\beta)=(y, z)$ のとき

$$U(\beta\alpha) = U(\alpha)\,U(\beta).$$

((F′ 3) において $\pi'(U(\alpha))=(T(y), T(x))$，$\pi'(U(\beta))=(T(z), T(y))$ であるから $U(\alpha)\,U(\beta)$ が定義されるのである.)

$\boldsymbol{CH}$ に付随する対象 X，すなわちコンパクト Hausdorff 空間に $C(X)=C(X, \boldsymbol{R})$ を対応させる写像を T と記し，X からコンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像 α に対して $\boldsymbol{R}$ 上の多元環の準同型写像 $\alpha^*: C(Y) \to C(X)$ $(\alpha^*(f)(x) =f(\alpha(x)))$ $(x \in X,\ f \in C(Y))$ を対応させる写像を U と記せば，U は T を対象関数とする $\boldsymbol{CH}$ から $\boldsymbol{Alg_R}$ への反変関手となる．

圏と関手については定義を与えただけで紙数が尽きてしまったが，これらのことについては，たとえば S. Mac Lane, "Categories for the Working Mathe-

matician", Springer (1971) により詳しい説明がある．それは代数的位相幾何学においても基調となる考えである．

解答・ヒント

第I部第1章

問題 1.4　$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$. 一方，$(P \vee Q \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \neg (P \vee Q) \vee Q \Longleftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee Q$ (de Morgan の法則による) $\Longleftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)$(分配法則による) $\Longleftrightarrow \neg P \vee Q$ (排中律による). ゆえに $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \vee Q \Longrightarrow Q)$.

問題 1.10　$x \in (a \cup b)^c = s - (a \cup b) \Longleftrightarrow x \in s \wedge \neg(x \in a \vee x \in b) \Longleftrightarrow x \in s \wedge (\neg (x \in a) \wedge \neg (x \in b)) \Longleftrightarrow (x \in s \wedge x \notin a) \wedge (x \in s \wedge x \notin b) \Longleftrightarrow x \in a^c \cap b^c$. $(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$ も同様にしめされる.

問題 1.11　$a \neq b$ のとき $\mathcal{P}(\{a\} \cup \{b\}) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. 一方，$\mathcal{P}(\{a\}) \cup \mathcal{P}(\{b\}) = \{\phi, \{a\}\} \cup \{\phi, \{b\}\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}\}$. ここで $\{a, b\} \neq \{a\}, \{b\}, \phi$ だから $\mathcal{P}(\{a\} \cup \{b\}) \supsetneqq \mathcal{P}(\{a\}) \cup \mathcal{P}(\{b\})$.

問題 1.12　系の証明のため $P(n)$ として $(n \in \omega \wedge a \in n \Longrightarrow a \in \omega)$ をとればよい.

第2章

問題 2.6　(i)　$\phi \times a = \phi$, $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$. また順序対 $(\phi \times a, \phi)$ は写像になるので $a^\phi = \{\phi\}$. (ii)　$a \times \phi = \phi$ だが $a \neq \phi$ ならば $(a \times \phi, \phi)$ は写像にならないので，$\phi^a = \phi$. (iii)　特に $1_a \in a^a$. ($\phi^\phi = \{\phi\}$, ϕ は 1_ϕ のグラフである.)

問題 2.10　$f : a \to m$, $g : b \to n$ をそれぞれ全単射とする. 写像 $h : a \cup b \to m+n$ を $x \in a$ のとき $h(x) = f(x)$, $x \in b - a$ のとき $h(x) = g(x) + m$ によって定めれば h は単射. ゆえに $|a \cup b| \leqq m+n$. $|a \times b| = mn$ をしめすため $x \in a, y \in b$ のとき $F(x, y) = f(x)^+ g(y)^+$ とおけば，写像 $F : a \times b \to (mn)^+ - \{0\}$ は全単射になる. $|a^b| = m^n$ は n に関する数学的帰納法によってしめされる.

問題 2.12　例 2.6 参照.

第3章

問題 3.8　f, g を $R[\overline{N}^+]$ の零とは異る元とし $m = \min\{x \in \overline{N} \mid f(x) \neq 0_R\}$, $n = \min\{x \in \overline{N} \mid g(x) \neq 0_R\}$ とすれば，$(f * g)(m+n) \neq 0_R$. $\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{Z}^\times]$ については読者自ら考えられたい.

第5章

問題 5.2　[ヒント]　定理 5.4 の証明を参照.

問題 5.6　(i)　$F \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ に $F(0)$ を対応させることによって群同型 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Z}, \leqq) \cong$

$(\boldsymbol{Z}, +)$ が得られる．

第6章

問題 6.2 α が無限集合なら定理 6.5 系より $\alpha=\omega\oplus\beta$ となるような順序数 β があるが，$\omega=1\oplus\omega$ (p. 109) なので $\alpha=(1\oplus\omega)\oplus\beta=1\oplus(\omega\oplus\beta)=1\oplus\alpha$．また，$\omega=1\oplus(1\oplus\omega)=2\oplus\omega$, $\cdots$, $\omega=n\oplus\omega$ よりこのとき同様に $\alpha=n\oplus\alpha$．逆に $\alpha=n\oplus\alpha$ ならば $\alpha=n\oplus(n\oplus\alpha)=2n\oplus\alpha$, $\cdots$, $\alpha=kn\oplus\alpha$ $(\forall k\in\omega)$．ゆえに定理 6.5 より $\alpha\supsetneqq kn$ $(\forall k\in\omega)$．ゆえに $\alpha\supset\omega$.

問題 6.3 後半については特に $A=\omega$, $\alpha=1, 2$ の場合について考えるとよい．

第II部第2章

問題 2.2 (ii) ヒントの補足．$N\in\tilde{N}(\boldsymbol{Q}^+)$, $n=[\boldsymbol{Q}^+:N]$ とする，$a\in\boldsymbol{Q}$ のとき $a=nb$ をみたす $b\in\boldsymbol{Q}$ がとれるから $a\in N$．ゆえに $N=\boldsymbol{Q}^+$.

問題 2.11 $U^c=\mathfrak{N}(A)$, $V^c=\mathfrak{N}(B)$ とすれば $U^c\neq K^n$, $V^c\neq K^n$ なので $f\in A, g\in B, x\in K^n, y\in K^n$ を適当にとれば $f(x)\neq 0, g(y)\neq 0$. $h=fg\in A\cap B, h\neq 0$ だから K が無限個の元を持つことより容易に $h(z)\neq 0$ をみたす $z\in K^n$ が存在することがいえる．したがって $U^c\cup V^c=\mathfrak{N}(A\cap B)\neq K^n$, ゆえに $U\cap V\neq\phi$.

問題 2.17 (i) $\Longrightarrow$ (ii) は問題 2.15 より明らか．(ii) $\Longrightarrow$ (iii) をしめすため，まず x, y を X の元で $x\neq y$ となるものとすれば，$X-\{y\}$ は x を含む開集合となることより $\mathfrak{N}_0(x)$ のすべての元の共通部分は $\{x\}$ となることに注意しよう．$U\in\mathfrak{N}_0(x)$ のとき U^c は有限集合であり，このような U^c すべての合併集合は $X-\{x\}$ である．ゆえに，(ii) $\Longrightarrow$ (iii). (iii) $\Longrightarrow$ (i) は容易．

問題 2.19 $S^i\cup S^b\cup S^e=X$, S^i, S^e は開集合で S^i, S^b, S^e は互いに共通部分を持たないから S^b は閉集合である．x が S^b の内点であるとして矛盾を導く．仮定より $x\in U, U\subset S^b$ をみたす開集合 U があり，$x\in S^b$ より $U\cap S\neq\phi$. S が開集合ならば，$U\cap S\subset S=S^i$. ゆえに $x\in U\cap S\subset S^b\cap S^i$ となり矛盾．S が閉集合ならば $U\cap S^c\neq\phi$. $U\cap S^c$ は開集合なので $U\cap S^c\subset S^e$．ゆえに $U\cap S^c\subset S^b\cap S^e$ となり $S^b\cap S^e=\phi$ と矛盾する．

問題 2.20 S を X の有限部分集合とすれば S は閉集合で $S^b=S$, ゆえに問題 2.19 により S は粗．一方，S が無限集合なら $\bar{S}=X$, ゆえに $\bar{S}^i=X$.

問題 2.21 X の部分集合 S が第一類の集合であるための必要十分条件は S が可算集合であることが問題 2.20 の結果から直ちにわかる．

問題 2.23 (i) $\lim_{n\in\boldsymbol{N}} n=a$ なら任意の $m\in\boldsymbol{N}$ に対して適当な n_0 をとれば $n_0\leqq n$ となる $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $a-n\in m\boldsymbol{Z}^+$, 特に $a-n_0, a-(n_0+1)$ は共に $m\boldsymbol{Z}^+$ に属するが，このとき $(a-n_0)-(a-(n_0+1))=1\in m\boldsymbol{Z}^+$ となり $m>1$ ならこれは矛盾である．

問題 2.24 $G\ni x, G\supset S, \bar{S}=S, x\notin S$ とすると $\bar{S}=\bigcap_{N\in\tilde{N}} NS$ ($\tilde{N}=\tilde{N}(G)$, 例 2.3) より適当

な $N\in\tilde{N}$ をとると $x\notin NS$. このときさらに $Nx\cap NS=\phi$ が容易にわかる. 例 2.9 より N は G の閉かつ開集合だから Nx, NS は共に開集合で $x\in Nx, S\subset NS$ より G の Krull 空間は正則である. 特に G が $\boldsymbol{Z}$ の加法群であり x, y を $\boldsymbol{Z}$ の相異なる元とすれば, $x-y$ の約数の個数は有限だから $n\in\boldsymbol{N}$ を適当にとれば $x-y\notin n\boldsymbol{Z}$ となる. これから $\boldsymbol{Z}$ の加法群の Krull 空間は T_1 空間となることがわかる.

問題 2.31 p が開写像ではないことは, 例えば, $U=\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき $p^{-1}(p(U))=U\cup\boldsymbol{Z}$ となることからいえる.

問題 2.37 $a\in\boldsymbol{Q}, b\in\boldsymbol{Q}, a<b$ のとき $a<r<b$ をみたす $r\in\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ が存在することをしめすとよい.

第 3 章

問題 3.4 (i) 逆をしめすには Uryson の補題を用いるとよい. (ii) F^* が全射となることをしめすには Tietze の拡張定理が使える.

第 4 章

問題 4.1 Y^X の有限開位相に関して $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda=f$ となるとし, x を X の任意の元としよう. U を $f(x)$ の任意の近傍とし $W=W(\{x\}, U)$ とおけば適当な $\lambda_0\in\Lambda$ に対して $\lambda_0<\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ のとき $f_\lambda\in W$. ゆえに $f_\lambda(x)\in U$, すなわち $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)=f(x)$ が成り立つ (§ 2.5 参照). 逆に, X の任意の元 x に対して $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)=f(x)$ が成り立つとし W を f の任意の近傍とすれば $W=\bigcap_{i=1}^{n} W(\{x_i\}, U_i)$ と表される. $i=1, \cdots, n$ に対して $\lambda_i\in\Lambda$ を

$$\lambda_i<\lambda \Longrightarrow f_\lambda(x_i)\in U_i$$

が成り立つように選び, $\lambda_i<\lambda_0$ $(i=1, \cdots, n)$ をみたす λ_0 をとれば, $\lambda_0<\lambda$ のとき $f_\lambda(x_i)\in U_i$ $(i=1, \cdots, n)$. ゆえにこのとき $f_\lambda\in W$ となり $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda=f$ がいえる.

問題 4.4 (TG 1) ～ (TG 3) については明らか. (TG 4) が成り立つことは $G\times G$ から G への写像で (g, h) を $g^{-1}h$ へ移すものが連続であることより特に $g=h=e$ の場合について考えればわかる. (TG 5) が成り立つことをしめすには G から G への写像で g を $x^{-1}gx$ へ移すものが連続となることを用い, 特に $g=e$ の場合について考えればよい. G が T_1 空間ならば (TG 6) が成り立つことは明らか.

問題 4.5 $g\in G, g\neq e$ のとき (TG 6) より $\mathfrak{N}_0$ の元 U で $g\notin U$ となるものがとれる. もしも $U\cap gU\neq\phi$ ならば $gu=v$ となるように U の元 u, v がとれるが, このとき $g=vu^{-1}\in U\cdot U^{-1}$. さて (TG 4) と同様に, $\mathfrak{N}_0$ の元 V で $V\cdot V^{-1}\subset U$ をみたすものがとれることがしめされる. このとき $V\cap gV=\phi$. G が Hausdorff 空間となることはこのことから容易にしめされる.

欧文索引

和文索引

カ 行

サ行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

集合と位相　　　　　　　　　　　　岩波基礎数学選書

1990年12月7日　第1刷発行 ©

定価 2600円
(本体 2524円)

著　者　彌（いや）永（なが）昌（しょう）吉（きち）
　　　　彌（いや）永（なが）健（けん）一（いち）

発行者　安　江　良　介

〒101-02 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
発行所　株式会社 岩　波　書　店
電話 03-265-4111

印刷・精興社　製本・三水舎

落丁本・乱丁本はお取替いたします　Printed in Japan
ISBN4-00-007806-2